2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 2.3.1. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1} n!x^n$, $x\in\mathbb{R}$ b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$, $x\in\mathbb{R}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}$, $x\in\mathbb{R}$ d) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$, $x\in\mathbb{R}$

e) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{n/2}\sqrt{1+n^2}}\,tg^n x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

R. a) {0}, b) $\mathbb{R}$, c) [-1, 1], d) $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$, e) $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

Exerciţiul 2.3.2. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor de puteri:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, $x\in\mathbb{R}$

b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $x\in\mathbb{R}$

R. a) $f(x) = \frac{1}{2}\,arctg\,x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1, 1)$; b) $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$
$x\in(-1, 1)$.

Exerciţiul 2.3.3. Să se determine sumele următoare, folosind seriile de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n-3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n-1)}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{6n+1}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$

Indicaţie:

a) Se foloseşte relaţia $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ şi teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 x^{3n-3}dx = \int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n-3}\right]dx = \int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-x^3)^{n-1}\right]dx = \int_0^1\frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

b) Se procedează ca mai sus.

c) Se observă că $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, a căror sumă se determină folosind teorema de derivare termen cu termen a unei serii de puteri. Suma cerută se obţine pentru $x = 1$.

d) Se foloseşte seria de puteri $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{6n+1}}{6n+1}$ şi teorema de derivare termen cu termen.

e) Se descompune $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ în fracţii simple.

R. a) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$, c) $\frac{\pi}{2}$ - *ln* 2,

d) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln(7+4\sqrt{3})+\frac{\pi}{6}$, e) $\frac{\pi}{8}$.

Exerciţiul 2.3.4. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$

b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}x^{n+2}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$

d) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n+2}{2n+1}x^{2n+1}$

R. a) $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in(-1, 1)$; b) $S(x)=-\frac{(1-x)^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}$

$x\in(-1, 1)$ iar în -1 şi 1 se prelungeşte prin continuitate; c) $S(x) = \ln\frac{2-x}{4}$, $x\in(-\infty, 0]$; d) $S(x) = \frac{2x^3-x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1, 1)$.

Exerciţiul 2.3.5. Să se calculeze $s = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)}\cdot\frac{1}{3^{2n}}$.

R. Se studiază seria de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(4n+1)3^{2n}}\cdot x^{4n+1}$.

Se obţine $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ şi

$s = S(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2+\sqrt{3})+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Exerciţiul 2.3.6. Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii indicând şi mulţimile de convergenţă:

a) $f(x) = \ln(1 + x)$ b) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

d) $f(x) = xe^{-2x}$ e) $f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$ f) $f(x)= \ln\frac{1+x}{1-x}$

g) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$ h) $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$ i) $f(x) = (1 + e^x)^3$

j) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

R. a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x\in(-1, 1]$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$, $|x|<1$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$, d) $x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$, $x\in\mathbb{R}$

e) $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$; f) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1, 1)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$;

i) $8+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n$, $x\in\mathbb{R}$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $x\in[0,\infty)$

Exerciţiul 2.3.7. Fie $f(x) = \arcsin x$, $x\in[-1, 1]$

a) Să se dezvolte această funcţie în serie de puteri ale lui x

b) Folosind această dezvoltare să se calculeze suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{(2n+2)!2^{2n+2}}$.

Indicaţie:

a) Se derivează funcţia şi se dezvoltă derivata în serie de puteri. Prin integrare termen cu termen se obţine, pentru $x\in(-1, 1)$

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Deoarece $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$, dezvoltarea se prelungeşte la intervalul $[-1, 1]$.

b) Deoarece $\int\arcsin x dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$, integrând termen cu termen seria de la a), punând $x = 0$ se obţine $c = -1$, deci

$$\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\frac{1}{2n+2}x^{2n+2} = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-1$$

Pentru $x=\frac{1}{2}$ obţinem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\frac{1}{2n+2}\frac{1}{2^{2n+2}} =$

$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{8}$. Deoarece $(2n+2)! = (2n-1)!!(2n)!!(2n+1)(2n+2)$ rezultă că suma cerută este $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{8}$.

Exerciţiul 2.3.8. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţia

$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Indicaţie:

Folosind dezvoltarea funcţiei *arcsin x*, pentru $x \neq 0$, se obţine dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\frac{\arcsin x}{x}$ şi apoi se ridică la pătrat.

Exerciţiul 2.3.9. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

a) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

c) $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ d) $\int_{0,1}^1 \frac{e^x}{x} dx$

R. a) 1, 605…; b) 0, 927…; c) 0, 244…; d) 3, 518…