12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 12.2.1. Să se calculeze $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, (S) fiind faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Soluţie. Avem: $x = 2 \sin \theta \cos \varphi$, $y = 2 \sin \theta \sin \varphi$, $z = 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $A = 4 \sin^2 \theta \cos \varphi$, $B = 4 \sin^2 \theta \sin \varphi$, $C = 4\sin\theta\cos\theta$.

Notând $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ şi aplicând formula din observaţia 12.1.2.2. obţinem:

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_D (2\sin\theta\cos\varphi \cdot 4\sin^2\theta\cos\varphi +$$

$$+ 2\sin\theta\sin\varphi \cdot 4\sin^2\theta\sin\varphi + 2\cos\theta \cdot 4\sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta)d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)d\theta d\varphi = 8 \iint_D \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 8 \cdot 2\pi \cdot 2 = 32\pi$$

Exerciţiul 12.2.2. Să se calculeze

$$\iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dxdy$$

pe faţa superioară a suprafeţei (S) definită prin $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Soluţie. Ţinând seama de observaţia 12.1.2.2. c) rezultă că

$$\vec{n} = \frac{-2x \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Cu formula din teorema 12.1.2.1. reducem problema la calculul unei integrale de suprafaţă de primul tip:

$$I = \iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}[-2x^2z - 2y^2z + (x^2 + y^2)]dS$$

Notând $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$ obţinem integrala:

$$I = \iint_D [(-2x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)]dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, obţinem

$$I = \iint_{D^*} r^2(1 - 2r^2)rdrdt = \iint_{D^*} (r^3 - 2r^5)drdt =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^3 - 2r^5)dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - 2 \cdot \frac{r^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{12} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

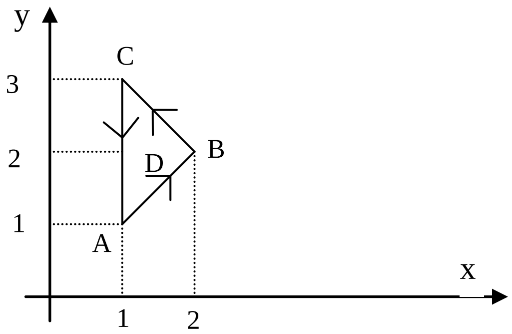
Exercițiul 12.2.3. Calculați direct și folosind formula lui Green-Riemann $\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, unde γ este triunghiul cu vârfurile A(1,1), B(2,2), C(1,3), parcurs o dată în sens pozitiv.

Soluție. γ este reuniunea segmentelor AB, BC, CA, unde:

AB: y = x, x ∈ [1, 2]

CB: y = 4 – x, x ∈ [1, 2]

AC: x = 1, y ∈ [1, 3]



Atunci $\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy = \int\limits_{AB} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy +$

$+ \int\limits_{BC} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy + \int\limits_{CA} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy =$

$$\int_1^2 [2(x^2+x^2)+(x+x)^2]dx + \int_2^1 [2(x^2+(4-x)^2)+(x+4-x)^2\cdot(-1)]dx +$$

$$\int_3^1 [2(1+y^2)\cdot 0+(1+y)^2\cdot 1]dy = \int_1^2 8x^2dx + \int_2^1 (4x^2-16x+16)dx$$

$$+ \int_3^1 (y^2+2y+1)dy = \int_1^2 (4x^2+16x-16)dx + \left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\Bigg|_3^1 =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3}+\frac{16x^2}{2}-16x\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\Bigg|_3^1 = -\frac{4}{3}$$

Aplicând acum formula Green-Riemann obținem:

$$\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}((x+y)^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2(x^2+y^2))\right]dxdy =$$

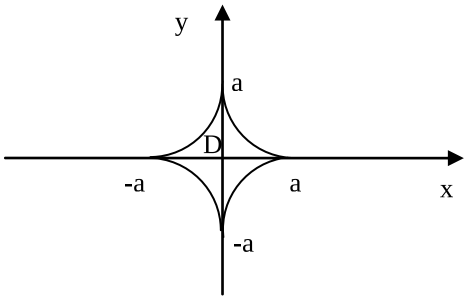
$$= \iint\limits_D [2(x+y)-4y]dxdy = 2\iint\limits_D (x-y)dxdy = 2\int_1^2\left[\int_x^{4-x}(x-y)dy\right]dx$$

$$= 2\int_1^2 \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x} dx = 2\int_1^2 (8x-2x^2-8)dx = -\frac{4}{3}$$

Exercițiul 12.2.4. Folosind integrala curbilinie de speța a II-a, să se calculeze aria figurii limitată de curba de ecuație $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$,

a > 0.

Soluție.



Curba de ecuaţie $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (astroida) are ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t\in[0, 2\pi]$.

Aria sa este A = $\frac{1}{2}\int\limits_{FrD} xdy - ydx$ =

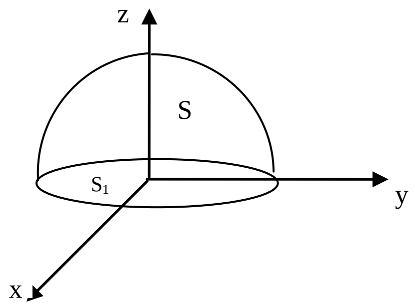
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\mathrm{a}\cos^3\mathrm{t}\cdot\left(3\mathrm{a}\sin^2\mathrm{t}\cos\mathrm{t}\right) - \mathrm{a}\sin^3\mathrm{t}\cdot(-3\mathrm{a}\cos^2\mathrm{t}\sin\mathrm{t})\right]\mathrm{dt}$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$$

$$= \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3a^2\pi}{8}$$

Exerciţiul 12.2.5. Să se calculeze $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy$ pe faţa exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Soluţie. Considerăm $\Omega = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, care este un domeniu compact elementar.



Frontiera sa este reuniunea a două suprafeţe având imaginile:

$$(S) = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$
$$(S_1) = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy + \iint\limits_{S_1} x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy =$$

$$= \iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

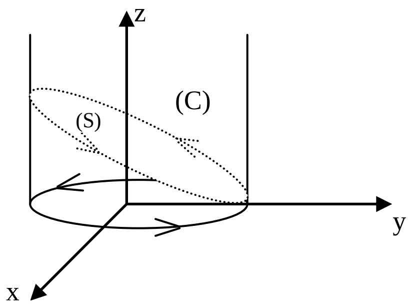
Dar $\iint\limits_{S_1} x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy = 0$ şi $\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\iiint\limits_{[0,R]x[0,\frac{\pi}{2}]x[0,2\pi]}\rho^2\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$ =

$$= 3 \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R \cdot (-\cos\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\varphi\big|_0^{2\pi}\right) = \frac{6\pi R^5}{5}.$$

Rezultă că $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + x^3 dxdy = \frac{6\pi R^5}{5} - 0 = \frac{6\pi R^5}{5}$

Exerciţiul 12.2.5. Să se calculeze folosind formula lui Stokes circulaţia câmpului $\vec{V} = (y - x)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ pe elipsa (C) obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $y + z = 1$, parcursă în sens direct.

Soluţie.



În acest caz rot $\vec{V} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Alegem drept suprafaţă ce are bordura orientată (C), porţiunea din planul y + z = 1 , limitată de cilindrul
$x^2 + y^2 = 1$.

Ea are ecuaţia $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v, (u,v) \in D \end{cases}$, unde $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \le 1\}$.

Din formula lui Stokes rezultă :

$$\oint\limits_{(C)} (y - x)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = \iint\limits_{(D)} -2(dydz + dzdx + dxdy) = -2\iint\limits_{(D)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dudv = -4\text{aria}(D) = -4\pi$$

Exerciţiul 12.2.6. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xyz \cdot \vec{i} + xyz \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} z^2(x + y)\vec{k}$$

este solenoidal în $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Punând $V_1(x, y, z) = xyz$, $V_2(x, y, z) = xyz$, $V_3(x, y, z) = -\frac{1}{2} z^2(x + y)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avem

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = yz + xy - z(x + y) = 0$$

Prin urmare $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.2.7. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2 y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

prin forntiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din $\mathbb{R}^3$ este nul

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = xy^2$, $V_2(x, y, z) = x^2 y$, $V_3(x, y, z) = -z(x^2 + y^2)$, avem:

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = y^2 + x^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Deci câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$. Din teorema 12.1.4.1. rezultă afirmaţia.

Exerciţiul 12.2.8. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot \vec{i} + x^2y\cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

este un câmp de rotori în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine un potenţial vector pentru $\vec{V}$.

Soluţie. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$ (exerciţiul 12.3.9). Din teorema 12.1.4.1. rezultă că $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori în $\mathbb{R}^3$. Căutăm un potenţial vector de o formă particulară:

$$\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$$

Egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ conduce la :

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x,y,t)dt + \varphi_1(x,y) = \int_{z_0}^{z} x^2 y dt + \varphi_1(x,y) =$$
$$= x^2y(z - z_0) + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x,y,t)dt + \varphi_2(x,y) = -\int_{z_0}^{z} xy^2 dt + \varphi_2(x,y) =$$
$$= -xy^2(z - z_0) + \varphi_2(x, y)$$

unde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este fixat, arbitrar, iar φ_1 şi φ_2 se aleg astfel ca:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x,y,z_0),$$

adica:
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -z_0(x^2 + y^2)$$

Putem alege, de exemplu, $\varphi_1(x, y) = z_0\frac{y^3}{3}$, $\varphi_2(x, y) = -z_0\frac{x^3}{3}$

Deci: $W_1(x, y, z) = x^2yz - x^2yz_0 + z_0\frac{y^3}{3} = x^2yz - yz_0(x^2 - \frac{y^2}{3})$

$$W_2(x, y, z) = -xy^2z + xy^2z_0 - z_0\frac{x^3}{3} = -xy^2z + xz_0(y^2 - \frac{x^2}{3})$$

iar câmpul vectorial $\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ într-o sferă cu centrul în (x_0, y_0, z_0). Se verifică imediat că egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ este adevărată în întreg $\mathbb{R}^3$, deci $\vec{W}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ în $\mathbb{R}^3$. Cum $\mathbb{R}^3$ este mulţime deschisă şi stelată, rezultă că orice alt potenţial vector pentru $\vec{V}$ este de forma

$\vec{W}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.2.9. Să se determine fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot \vec{i} + x^2y\cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

prin faţa exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

Soluţie. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$(vezi exerciţiul 12.3.9.), iar

$\vec{W}$ (x, y, z) = $x^2yz\cdot\vec{i} - xy^2z\cdot\vec{j}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ (în exerciţiul 12.3.10 am considerat $z_0 = 0$). Ţinând seama de observaţia 12.1.4.3. fluxul căutat este:

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{W}\cdot d\vec{r}$$

unde (S) este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, iar (C) este bordura sa orientată, adică cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ orientat pozitiv. Ecuaţiile parametrice ale cercului (C) fiind x = cos t, y = sin t, z = 0, $t \in [0, 2\pi]$, rezultă:

$$\int_C \vec{W}\cdot d\vec{r} = \int_C x^2yzdx - xy^2zdy = 0,$$

prin urmare fluxul căutat este nul.

Exerciţiul 12.2.10. Să se calculeze:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy$$

unde (S) este faţa inferioară a porţiunii de paraboloid $z = x^2 + (y - 1)^2$ cuprinsă în cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Soluţie. Este evident că $\vec{V}$ (x, y, z) = $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$ şi că, de exemplu $\vec{W}$ (x, y, z) = $z\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j}$ este un potenţial vector al său. Notând cu (C) bordura orientată a suprafeţei (S), aceasta este curba dată de:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

parcursă în sens invers trigonometric, când se priveşte din origine şi are reprezentarea parametrică:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos^2 t + (\sin t - 1)^2,\ t \in [0, 2\pi]$$

Ţinând seama de observaţia 12.1.4.3. avem:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy = \int_C zdx + (x+z)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-(2 - 2\sin t)\sin t + (2 + \cos t - 2\sin t)\cos t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin t + \sin^2 t + 1 + 2\cos t - \sin 2t)dt =$$

$$= \left(2\cos t + 2\sin t + \frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt + 2\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 2\pi = \pi + 2\pi = 3\pi$$