ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

Stănescu I. Marius Marinel

0.1 Prefaţă

Această lucrare a fost concepută ca manual pentru studenţii anilor întâi ai facultăţilor tehnice cu specializarea în mecanică şi urmăreşte îndeaproape programa universitară elaborată pentru cursul de „Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială".

Cartea este structurată pe trei părţi- Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială.

Prima parte se compune din capitolele: 1. Spaţii vectoriale; 2. Morfisme de spaţii vectoriale; 3. Forme biliniare. Forme pătratice; 4. Spaţii vectoriale euclidiene; 5. Tensori; capitole ce totalizează un număr de 31 de paragrafe.

Partea a doua este alcătuită din capitolele: 6. Vectori liberi; 7. Dreapta şi planul; 8. Cuadrice şi conice; care însumează 10 paragrafe.

A treia parte este formată din capitolele: 9. Curbe; 10. Suprafeţe; fragmentate în 10 paragrafe.

Cifrele ce preced fiecare paragraf constituie prima numărul capitolului şi următoarea numărul paragrafului, iar elementele fiecărui paragraf sunt notate în ordinea crescătoare în funcţie de tipul acestora, prima cifră reprezentînd numărul capitolului, următoarea numărul paragrafului, iar ultima fiind numărul curent .

Din dorinţa de a delimita în sensul notaţiei, vectorii utilizaţi în cadrul Algebrei Liniare, sunt notaţi în mod distinct fără semnul caracteristic cu care apar în Geometria Analitică şi cea Diferenţială.

În fiecare paragraf sunt prezentate observaţii cu caracter completativ şi exemple care justifică conţinutul teoretic.

Majoritatea demonstraţiilor sunt prezentate în detaliu (unde este posibil demonstraţia apare însoţită şi de desene-în special în cazul părţilor a doua şi a treia) din dorinţa de a face accesibile etapele gândirii logice în obţinerea rezultatelor teoremelor, lemelor, afirmaţiilor sau observaţiilor respective.

Pe tot parcursul lucrării sunt presupuse a fi cunoscute noţiunile elementare din cadrul Algebrei Liniare, Geometriei Analitice şi Analizei Matematice studiate în liceu, asupra celor mai des utilizate revenindu-se printr-o prezentare succintă şi în această carte.

Autorul mulţumeşte prof.dr.Stavre Petre şi prof.dr.Murărescu Gheorghe pentru ajutorul acordat în conceperea acestei cărţi, având în vedere experienţa ca geometrii a celor doi profesori universitari.

Autorul mulţumeşte de asemenea prof.dr.doc.Cojocaru Petru şi prof. dr. Niculescu Constantin, pentru unele discuţii pe care au acceptat să le aibă pe marginea elaborării acestui manual.

Autorul

0.2 Cuprins

Partea I

Algebră liniară

Capitolul 1

Spaţii vectoriale.

1.1 Definiţia spaţiului vectorial. Exemple. Proprietăţi.

În geometria analitică şi în mecanică se utilizează segmentele orientate, vectorii. Pentru vectori sunt stabilite prin definiţie reguli de operare: pentru suma a doi vectori şi produsul unui vector cu un număr real, utilizând-se regulile aritmetice uzuale de calcul.

Definiţia unui spaţiu vectorial generalizează definiţia mulţimii tuturor vectorilor. Generalizarea se produce în primul rând pe calea îndepărtării de natura concretă a segmentelor orientate cu păstrarea proprietăţilor operaţiilor asupra acelor obiecte şi în al doilea rând, pe calea îndepărtării de natura concretă a multiplicatorilor admişi (numere reale). Este obţinută astfel următoarea definiţie.

Definiţia 1.1.1 *O mulţime $\mathcal{K}$ se numeşte spaţiu vectorial peste un corp* **K** *dacă:*

a) *există o regulă (numită regula adunării) prin care oricărei perechi de elemente x, y din $\mathcal{K}$ îi corespunde un al treilea element $z \in \mathcal{K}$, numit suma elementelor x, y şi notat $x + y$. Regula de adunare are următoarele proprietăţi:*

1. $x + y = y + x$ *pentru orice* $x, y \in \mathcal{K}$;

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *pentru orice* $x, y, z \in \mathcal{K}$;

3. *există un element 0 (vectorul nul) în $\mathcal{K}$ astfel încât $x+0 = 0+x$ pentru orice $x \in \mathcal{K}$;*

4. *pentru orice $x \in \mathcal{K}$ există un element $y \in \mathcal{K}$ astfel încât $x + y = 0$ (există vectorul opus).*

b) *există o regulă (numită regula multiplicării cu un număr) care permite ca pentru orice element $x \in \mathcal{K}$ şi pentru orice număr $\lambda \in$* **K** *să se poată* *construi un element $u \in \mathcal{K}$ (numit produsul elementului x cu numărul λ şi notat $u = \lambda x$). Se presupune că regula de multiplicare cu un număr are următoarele proprietăţi:*

5. $1x = x$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$ *;*

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$ *şi pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ *;*

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$ *şi oricare ar fi* $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ *;*

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *pentru orice* $x, y \in \mathcal{K}$ *şi oricare ar fi* $\alpha \in \mathbf{K}$ *.*

Elementele unui spaţiu vectorial se numesc vectori, eliminând sensul concret (segment orientat) dat acestui termen. Reprezentările geometrice legate de denumirea de vector ne ajută în clarificarea, în previziunea unor rezultate şi de asemenea în găsirea sensului geometric al unor fapte de algebră sau analiză. Din axiomele 1.-8. se pot obţine următoarele teoreme.

Teorema 1.1.1. *În orice spaţiu vectorial există un unic vector nul.*

Demonstraţie. Existenţa cel puţin a unui vector nul este afirmată în axioma 3. Admitem că în spaţiul $\mathcal{K}$ ar exista doi vectori nuli: 0_1 şi 0_2. Punând în axioma 3. pe $x = 0_1, 0 = 0_2$, obţinem $0_1 + 0_2 = 0_1$. Folosind în aceeaşi axiomă $x = 0_2, 0 = 0_1$, obţinem $0_2 + 0_1 = 0_2$. Comparând egalităţile obţinute şi utilizând axioma 1, rezultă că $0_1 = 0_2$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Teorema 1.1.2. *În orice spaţiu vectorial pentru orice element există un singur element opus.*

Demonstraţie. Existenţa cel puţin a unui element opus este afirmată în axioma 4. Admitem că pentru un element x fixat ar exista două elemente opuse y_1 şi y_2. Adunăm la ambii membrii ai egalităţii $x + y_1 = 0$ elementul y_2; utilizând axiomele 2 şi 3, obţinem

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = 0 + y_1 = y_1,$$

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + 0 = y_2,$$

de unde $y_1 = y_2$, ceea ce trebuia arătat. ■

Teorema 1.1.3. *Pentru orice element x dintr-un spaţiu vectorial oarecare are loc egalitatea $0x = 0$ (în membrul drept 0 reprezintă vectorul nul, iar în membrul stâng 0 reprezintă numărul 0).*

Demonstraţie. Considerăm elementul $0x + 1x$; folosind axiomele 7 şi 5 rezultă

$$0x + 1x = (0 + 1)x = 1x = x, 0x + 1x = 0x + x,$$

de unde

$$x = 0x + x;$$

adăugând la ambii membrii ai ultimei egalităţi opusul y al lui x rezultă că

$$0 = x + y = (0x + x) + y = 0x + (x + y) = 0x + 0 = 0x,$$

de unde

$$0 = 0x.$$

■

Teorema 1.1.4. *Pentru orice element x dintr-un spaţiu vectorial oarecare, elementul său opus este $y = (-1)x$.*

Demonstraţie. Formăm suma $x + y$; folosind axiomele 1-8 şi teorema precedentă, rezultă

$$x + y = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Vom desemna în cele ce urmează elementul opus lui x prin $-x$; teorema 1.1.4. conduce evident la această notaţie.

Prezenţa elementului opus permite introducerea operaţiei de scădere a vectorilor. Anume, diferenţa $x - y$ se defineşte ca suma lui x cu $-y$. Această definiţie este compatibilă cu definiţia scăderii din aritmetică.

Un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale se numeşte real şi îl vom nota prin $\mathcal{R}$. Un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe se numeşte complex şi îl vom nota prin $\mathcal{C}$.

Dacă sunt indicate atât natura elementelor $x, y, z, ...$ cât şi regulile de operare cu ele (fiind îndeplinite axiomele 1-8) vom numi acel spaţiu vectorial concret şi, de regulă vom folosi pentru el o anumită notaţie.

În cele ce urmează, vor fi deosebit de importante următoarele patru tipuri de spaţii concrete:

a) Spaţiul $\mathbf{E}_3$. Elementele acestui spaţiu sunt vectori liberi (priviţi ca o clasă de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate), consideraţi în geometria analitică (a se vedea partea a doua a acestei cărţi-"Geometrie Analitică"). Fiecare vector se caracterizează prin lungime, direcţie şi sens (cu excepţia vectorului nul a cărui lungime este nulă şi direcţia arbitrară). Adunarea vectorilor este definită ca de obicei prin regula paralelogramului. Multiplicarea unui vector printr-un număr real λ este definită de asemenea în mod uzual (anume, lungimea vectorului se înmulţeşte cu $|\lambda|$, direcţia neschimbată, iar sensul rămâne neschimbat pentru $\lambda > 0$ şi se înlocuieşte cu cel opus pentru $\lambda < 0$). Se poate arăta relativ simplu că în acest caz toate axiomele 1-8 sunt îndeplinite. Mulţimile similare de vectori în plan sau pe dreaptă, formează în mod natural spaţii vectoriale pe care le notăm prin $\mathbf{E}_2$ şi $\mathbf{E}_1$; $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ sunt spaţii vectoriale peste corpul $\mathbf{R}$, deci spaţii vectoriale reale.

b) Spaţiul $\mathbf{K}_n$. Elementele acestui spaţiu sunt sistemele ordonate de n numere din corpul $\mathbf{K}$, $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Aceste numere $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ se numesc coordonatele elementului x. Operaţiile de adunare şi multiplicare cu un număr $\lambda \in \mathbf{K}$ se efectuează după următoarele reguli:

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ..., \xi_n + \eta_n), \qquad (1.1.1)$$

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, ..., \lambda\xi_n). \qquad (1.1.2)$$

Axiomele 1-8 sunt satisfăcute. În particular, elementul 0 din $\mathbf{K}_n$ este un sistem de n zerouri: $0 = (0, 0, ..., 0)$. Dacă $\mathbf{K}$ este corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale, notaţia $\mathbf{K}_n$ se înlocuieşte prin $\mathcal{R}_n$, iar dacă $\mathbf{K}$ este corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe, notaţia $\mathbf{K}_n$ se înlocuieşte prin $\mathcal{C}_n$.

c) Spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$. Element al acestui spaţiu este orice funcţie continuă reală $x = x(t)$ definită pe segmentul $a \leq t \leq b$. Operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire cu numere reale se definesc după regulile analizei; îndeplinirea axiomelor 1-8 este imediată. Elementul 0 este funcţia identic nulă. Spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$ este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

d) Spaţiul $\mathcal{C}(a, b)$ este alcătuit din funcţiile complexe şi continue pe segmentul $a \leq t \leq b$ şi reprezintă un spaţiu vectorial peste corpul numerelor complexe.

Observaţia 1.1.1. În geometria analitică este comod uneori de considerat alături de vectorii liberi şi vectorii cu originea fixată în originea coordonatelor. În acest mod, fiecărui vector i se asociază un anumit punct al spaţiului-extremitatea sa şi fiecare punct al spaţiului defineşte un vector corespunzător-aşa numitul vector de poziţie al acestui punct. Având în vedere această situaţie, vom numi uneori elementele unui spaţiu vectorial, nu vectori, ci puncte. Se subînţelege că o astfel de modificare a terminologiei nu aduce modificări în definiţii şi apelează doar la reprezentările noastre geometrice.

1.2 Dependenţă liniară.

Fie $x_1, x_2, ..., x_k$ vectori într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ peste un corp $\mathbf{K}$ şi numerele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ din $\mathbf{K}$. Vectorul

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k$$

se numeşte combinaţie liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$; numerele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ se numesc coeficienţii acestei combinaţii liniare.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, atunci, în virtutea teoremei 1.1.3. rezultă că $y = 0$. Dar se poate să existe o combinaţie liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ în care nu toţi coeficienţii sunt nuli şi care dă ca rezultat vectorul nul; în acest caz vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc liniar dependenţi.

Cu alte cuvinte, vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc liniar dependenţi dacă există numere $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ nu toate nule astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k = 0. \tag{1.2.1}$$

Dacă egalitatea (1.2.1) este posibilă doar în cazul când $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, atunci vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc liniar independenţi.

Exemplul 1.2.1. În spaţiul vectorial $\mathbf{E}_3$ dependenţa liniară a doi vectori înseamnă că ei sunt paraleli cu una şi aceeaşi dreaptă; dependenţa liniară a trei vectori revine la aceea că ei sunt paraleli cu unul şi acelaşi plan. Orice patru vectori sunt liniar dependenţi.

Exemplul 1.2.2. Determinăm ce înseamnă dependenţa liniară a unor vectori $x_1, x_2, ..., x_k$ din spaţiul vectorial $\mathbf{K}_n$, unde am presupus că $x_i = \left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, ..., \xi_n^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, ..., k$. Atunci relaţia

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k = 0$$

înseamnă că au loc n relaţii

$$\begin{cases} \alpha_1 \xi_1^{(1)} + \alpha_2 \xi_1^{(2)} + ... + \alpha_k \xi_1^{(k)} = 0, \\ \alpha_1 \xi_2^{(1)} + \alpha_2 \xi_2^{(2)} + ... + \alpha_k \xi_2^{(k)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 \xi_n^{(1)} + \alpha_2 \xi_n^{(2)} + ... + \alpha_k \xi_n^{(k)} = 0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

dependenţa liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$, revine la existenţa unor constante $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, nu toate nule, astfel încât să fie verificate relaţiile (1.2.2). Astfel, problema dependenţei liniare a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ în cazul general revine la problema existenţei unei soluţii nenule pentru un sistem omogen de ecuaţii liniare în care coeficienţii sunt tocmai coordonatele corespunzătoare ale vectorilor consideraţi.

Exemplul 1.2.3. În anumite cazuri putem să facem unele consideraţii relativ la dependenţa şi independenţa unui sistem dat de vectori. De exemplu, să considerăm în spaţiul $\mathbf{K}_n$ următorii n vectori : $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$. Sistemul (1.2.2) pentru aceşti vectori are forma

$$\begin{cases} \alpha_1 1 + \alpha_2 0 + ... + \alpha_k 0 = 0, \\ \alpha_1 0 + \alpha_2 1 + ... + \alpha_k 0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + ... + \alpha_k 1 = 0. \end{cases}$$

El admite o soluţie unică şi anume $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Astfel, vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ din spaţiul $\mathbf{K}_n$ sunt liniar independenţi.

Exemplul 1.2.4. Dependenţa liniară a vectorilor $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_k = x_k(t)$ din spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$ (sau $\mathcal{C}(a, b)$) revine la existenţa unei relaţii de forma

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + ... + \alpha_k x_k(t) = 0,$$

unde constantele reale (complexe) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ nu sunt toate nule. De exemplu, funcţiile $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = \sin^2 t$, $x_3(t) = 1$ sunt liniar dependente deoarece are loc relaţia

$$x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = 0, \text{oricare ar fi } t \in (a, b).$$

Arătăm că funcţiile $1, t, t^2, ..., t^k$ sunt liniar independente. Presupunem că există o relaţie

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 t + ... + \alpha_k t^k = 0. \tag{1.2.3}$$

Derivând succesiv de k ori egalitatea (1.2.3) se obţine un sistem de $k + 1$ ecuaţii relativ la mărimile $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$, cu determinantul diferit de zero; rezolvând acest sistem cu regula lui Cramer se obţine $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Aşadar, funcţiile $1, t, t^2, ..., t^k$ sunt liniar independente în spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$.

În continuare prezentăm două proprietăţi ale sistemelor de vectori, legate de dependenţă liniară.

Lema 1.2.1. *Dacă o parte din vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar dependenţi, atunci întreg sistemul $x_1, x_2, ..., x_n$ este liniar dependent.*

Demonstraţie. Presupunem că vectorii $x_1, x_2, ..., x_j$ $(j < k)$ sunt liniar dependenţi, aşadar are loc o relaţie de forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_j x_j = 0,$$

unde nu toate constantele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j$ sunt nule. Conform teoremei 1.1.3. şi axiomei 3. are loc egalitatea

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_j x_j + 0x_{j+1} + ... + 0x_k = 0,$$

ceea ce arată că vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar dependenţi, deoarece printre constantele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, 0, ..., 0$, există cel puţin una nenulă. ■

Lema 1.2.2. *Vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă unul dintre ei este combinaţie liniară a celorlalţi.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$ ” Fie că vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar dependenţi, atunci în combinaţia

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k = 0,$$

nu toate constantele α_i , $i = 1, 2, ..., k$ sunt nule. Să considerăm că $\alpha_1 \neq 0$ (altfel se procedează la o renumerotare), atunci

$$x_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) x_3 + ... + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right) x_k \ ,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

„$\Leftarrow$ ” Fie că vectorul x_1 se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi, adică

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_k x_k \ ,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(-1)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_k x_k = 0 \ ,$$

ceea ce reprezintă tocmai faptul că vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar dependenţi ($\alpha_1 = -1 \neq 0$). ■

1.3 Bază, coordonate, dimensiune.

Definiţie 1.3.1. *Un sistem de vectori liniar independenţi $e_1, e_2, ..., e_n$ dintr-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{K}$ dacă pentru orice $x \in \mathcal{K}$ există o reprezentare de forma*

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \quad \big(\xi_j \in \mathbf{K}, \quad j = 1, 2, ..., n\big) \tag{1.3.1}$$

În condiţiile indicate, coeficienţii dezvoltării (1.3.1) sunt unic determinaţi şi se numesc coordonatele vectorului x.

Într-adevăr, dacă un vector x admite două dezvoltări de forma (1.3.1)

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,$$

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n,$$

atunci scăzând aceste relaţii termen cu termen, se obţine egalitatea

$$0 = (\xi_1 - \eta_1)e_1 + (\xi_2 - \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n - \eta_n)e_n.$$

Conform ipotezei de independenţă liniară a vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$ se obţine $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, ..., \xi_n = \eta_n$. Aceste numere unic determinate $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ se numesc coordonatele vectorului x relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$.

Exemplul 1.3.1. În spaţiul $\mathbf{E}_3$ o bază este constituită de versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ai unui triedru ortogonal de axe(prin versorul unei drepte înţelegându-se acel vector care dă orientarea direcţiei respective şi care are lungimea egală cu

1). Coordonatele ξ_1, ξ_2, ξ_3 ale unui vector x relativ la această bază sunt proiecţiile vectorului x pe axele triedrului.

Exemplul 1.3.2. În spaţiul $\mathbf{K}_n$ un exemplu de bază îl constituie sistemul de vectori $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$,pe care l-am considerat în exemplul 1.2.3. de la „dependenţă liniară ".

Într-adevăr, pentru orice vector $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbf{K}_n$ este evidentă egalitatea

$$x = \xi_1(1, 0, ..., 0) + \xi_2(0, 1, ..., 0) + ... + \xi_n(0, 0, ..., 1),$$

care demonstrează, împreună cu liniar independenţa vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$, că aceşti vectori formează o bază în spaţiul $\mathbf{K}_n$.

În particular, numerele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt coordonatele lui x relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$.

Exemplul 1.3.3. În spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$ nu există o bază în sensul definit de noi.

Importanţa considerării unei baze într-un spaţiu vectorial constă în aceea că anumite operaţii liniare din acel spaţiu definite la început abstract, devin operaţii liniare uzuale cu numere (cu coordonatele vectorilor consideraţi relativ la acea bază). Are loc următoarea teoremă.

Teorema 1.3.1. *Pentru adunarea a doi vectori din spaţiul $\mathcal{K}$, coordonatele lor (relativ la o bază oarecare fixată) se adună. La înmulţirea unui vector cu un număr, toate coordonatele vectorului se înmulţesc cu acel număr.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n,$$

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n.$$

Folosind axiomele 1-8 rezultă

$$x + y = x = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n + \eta_n)e_n,$$

$$\lambda x = \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + ... + \lambda\xi_n e_n,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Definiţie 1.3.1'. *Dacă într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ se găsesc n vectori liniar independenţi şi orice $n+1$ vectori ai acelui spaţiu sunt liniar dependenţi, atunci numărul n se numeşte dimensiunea spaţiului $\mathcal{K}$; spaţiul $\mathcal{K}$ se numeşte atunci n-dimensional.*

În continuare, pentru un spaţiu n-dimensional peste un corp $\mathbf{K}$ vom utiliza notaţia $\mathcal{K}_n$ ($\mathcal{R}_n$ peste corpul $\mathbf{R}$, $\mathcal{C}_n$ peste corpul $\mathbf{C}$). Un spaţiu în care se pot indica oricât de mulţi vectori liniar independenţi se numeşte infinit dimensional.

Teorema 1.3.2. *Într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ de dimensiune n există o bază formată din n vectori; mai mult, orice sistem de n vectori liniar independenţi din $\mathcal{K}$ constituie o bază a acestui spaţiu.*

Demonstraţie. Fie $e_1, e_2, ..., e_n$ un sistem de n vectori liniar independenţi din spaţiul n-dimensional $\mathcal{K}$. Dacă x este un vector oarecare din $\mathcal{K}$, atunci sistemul de $n+1$ vectori $x, e_1, e_2, ..., e_n$ este liniar dependent şi prin urmare există o relaţie de forma

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0, \tag{1.3.2}$$

unde coeficienţii $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ nu sunt toţi nuli. Coeficientul α_0 este diferit de zero, deoarece în caz contrar ar exista o dependenţă liniară între vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$. Aşadar $\alpha_0 \neq 0$ şi împărţind relaţia (1.3.2) cu α_0, rezultă că x se exprimă liniar cu ajutorul vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$. Deoarece x este un vector oarecare al spaţiului $\mathcal{K}$, am arătat că vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ formează o bază în acest spaţiu. ■

Are loc şi reciproca teoremei 1.3.2.

Teorema 1.3.3. *Dacă în spaţiul $\mathcal{K}$ există o bază, atunci dimensiunea spaţiului este egală cu numărul vectorilor din bază.*

Demonstraţie. Presupunem că vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{K}$. Conform definiţiei unei baze, vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ sunt liniar independenţi în $\mathcal{K}$ şi deci avem n vectori liniar independenţi în $\mathcal{K}$.

Arătăm că orice $n+1$ vectori din $\mathcal{K}$ sunt liniar dependenţi.

Fie $n+1$ vectori din $\mathcal{K}$

$$x_1 = \xi_1^{(1)} e_1 + \xi_2^{(1)} e_2 + ... + \xi_n^{(1)} e_n,$$

$$x_2 = \xi_1^{(2)} e_1 + \xi_2^{(2)} e_2 + ... + \xi_n^{(2)} e_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = \xi_1^{(n+1)} e_1 + \xi_2^{(n+1)} e_2 + ... + \xi_n^{(n+1)} e_n.$$

Scriind pe câte o coloană coordonatele fiecăruia dintre aceşti vectori, se formează o matrice cu n linii şi $n+1$ coloane

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & ... & \xi_1^{(n+1)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & ... & \xi_2^{(n+1)} \\ ...... & ...... & ... & ...... \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & ... & \xi_n^{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Fie r rangul matricii A ($r \leq n$) şi fixăm un minor principal al lui A. Dacă $r = 0$ dependenţa liniară a vectorilor $x_1, ..., x_{n+1}$ este imediată. Presupunem $r > 0$ şi fixăm r coloane de bază (principale). În matricea A există cel puţin încă o coloană care nu intră printre coloanele de bază. Conform teoremei minorului principal, această coloană este combinaţie liniară a coloanelor de bază (principale). Vectorul corespunzător din $\mathcal{K}$ este deci combinaţie liniară a celorlalţi vectori (dintre cei daţi $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$). Dar în acest caz vectorii $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ sunt conform lemei 1.2.2. liniar dependenţi, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplul 1.3.4. Spaţiul $\mathbf{E}_3$ este tridimensional deoarece el are o bază din trei vectori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$; în mod corespunzător $\mathbf{E}_2$ este bidimensional şi $\mathbf{E}_1$ unudimensional.

Exemplul 1.3.5. Spaţiul $\mathbf{K}_n$ este n-dimensional deoarece el are o bază din n vectori, anume $e_1, e_2, ..., e_n$.

Exemplul 1.3.6. În spaţiile $\mathcal{R}(a, b)$ şi $\mathcal{C}(a, b)$ există un număr oricât de mare de vectori liniar independenţi (exemplul 1.2.4.„dependenţă liniară") şi prin urmare aceste spaţii sunt infinit dimensionale (ele nu admit baze finite).

1.4 Subspaţii vectoriale.

Admitem că o colecţie $\mathcal{L}$ de elemente ale unui spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ are următoarele proprietăţi:

a) dacă $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}$, atunci $x + y \in \mathcal{L}$;

b) dacă $x \in \mathcal{L}$ şi λ este un element al corpului $\mathbf{K}$, atunci $\lambda x \in \mathcal{L}$.

Astfel în mulţimea $\mathcal{L}$ sunt definite operaţii liniare. Arătăm că se obţine chiar un spaţiu vectorial. Pentru aceasta trebuie să dovedim că mulţimea $\mathcal{L}$ înzestrată cu operaţiile a), b) verifică axiomele 1-8. Axiomele 1,2,5-8 se verifică deoarece ele au loc, mai general, pentru toate elementele spaţiului $\mathcal{K}$. Rămâne să arătăm că sunt îndeplinite axiomele 3 şi 4. Fie x un element oarecare din $\mathcal{L}$; atunci $\lambda x \in \mathcal{L}$ pentru orice λ real. Alegem $\lambda = 0$; atunci, conform teoremei 1.1.3., $0x = 0$, deci vectorul nul aparţine lui $\mathcal{L}$ şi astfel în $\mathcal{L}$ este îndeplinită axioma 3. Alegem acum $\lambda = -1$; deoarece conform teoremei 1.1.4., $(-1)x$ este elementul opus lui x, mulţimea $\mathcal{L}$ conţine odată cu un element x şi opusul acestuia. Astfel axioma 4. este şi ea îndeplinită, afirmaţia noastră fiind complet demonstrată.

Definiţia 1.4.1. *Aşadar, orice submulţime $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ care verifică condiţiile a) şi b) este un spaţiu vectorial, care se numeşte subspaţiu vectorial (sau simplu subspaţiu) al spaţiului $\mathcal{K}$.*

Exemplul 1.4.1. Subspaţiul format din vectorul nul al spaţiului $\mathcal{K}$ se regăseşte în intersecţia tuturor subspaţiilor spaţiului $\mathcal{K}$.

Exemplul 1.4.2. Întreg spaţiul $\mathcal{K}$ poate fi privit ca un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{K}$.

Aceste două subspaţii-vectorul nul şi întreg spaţiul-se numesc uneori subspaţii triviale, iar celelalte subspaţii se numesc proprii (sau netriviale).

Exemplul 1.4.3. Fie $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ două subspaţii ale unui acelaşi spaţiu vectorial $\mathcal{K}$. Mulţimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{K}$ care aparţin atât lui $\mathcal{L}_1$ cât şi lui $\mathcal{L}_2$ formează un subspaţiu numit intersecţia subspaţiilor $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$. Mulţimea tuturor vectorilor de forma $y + z$, unde $y \in \mathcal{L}_1$, $z \in \mathcal{L}_2$ formează un subspaţiu numit suma subspaţiilor $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$.

Exemplul 1.4.4. În spaţiul $\mathbf{E}_3$ toţi vectorii paraleli cu un plan fixat formează un subspaţiu; acelaşi lucru are loc pentru vectorii paraleli cu o dreaptă fixată. Dacă este vorba nu de vectori ci de puncte, atunci subspaţiile spaţiului $\mathbf{E}_3$ sunt mulţimi de puncte situate pe plane sau drepte trecând prin originea coordonatelor.

Exemplul 1.4.5. În spaţiul $\mathbf{K}_n$ considerăm mulţimea $\mathbf{L}$ a tuturor vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ale căror coordonate satisfac sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

cu coeficienţii din corpul $\mathbf{K}$ şi cu termenii liberi egali cu 0. Un astfel de sistem se numeşte sistem liniar omogen. Un sistem liniar omogen este totdeauna compatibil, deoarece are în mod evident soluţia „nulă” $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Considerăm $\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, ..., c_n^{(1)}\right)$ şi $\left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, ..., c_n^{(2)}\right)$ două soluţii ale sistemului (1.4.1) şi fie numerele

$$c_1 = c_1^{(1)} + c_1^{(2)}, c_2 = c_2^{(1)} + c_2^{(2)}, ..., c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}.$$

Afirmăm că $(c_1, c_2, ..., c_n)$ este de asemenea soluţie a sistemului (1.4.1). Într-adevăr, înlocuind aceste numere în ecuaţia i-a a sistemului, se obţine $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + ... + a_{in}c_n = a_{i1}\left(c_1^{(1)} + c_1^{(2)}\right) + a_{i2}\left(c_2^{(1)} + c_2^{(2)}\right) + ... + a_{in}\left(c_n^{(1)} + c_n^{(2)}\right) = \left(a_{i1}c_1^{(1)} + ... + a_{in}c_n^{(1)}\right) + \left(a_{i1}c_1^{(2)} + ... + a_{in}c_n^{(2)}\right) = 0$,ceea ce trebuia demonstrat.

Această soluţie este numită suma soluţiilor $\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, ..., c_n^{(1)}\right)$ şi $\left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, ..., c_n^{(2)}\right)$. În mod analog, dacă $(c_1, c_2, ..., c_n)$ este o soluţie oarecare a sistemului (1.4.1), atunci $(\lambda c_1, \lambda c_2, ..., \lambda c_n)$ pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}$ fixat, este de asemenea soluţie a sistemului (1.4.1); această soluţie va fi numită produsul soluţiei $(c_1, c_2, ..., c_n)$ cu numărul λ .

Astfel, soluţiile unui sistem liniar omogen cu coeficienţi într-un corp $\mathbf{K}$ pot fi adunate între ele şi pot fi înmulţite cu numere din acelaşi corp $\mathbf{K}$, obţinându-se tot o soluţie.

Cu aceasta am probat că mulţimea $\mathbf{L}$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathbf{K}_n$ şi deci un spaţiu vectorial. El se numeşte spaţiul soluţiilor sistemului (1.4.1).

Prezentăm câteva proprietăţi ale subspaţiilor legate de noţiunile de dependenţă liniară, bază, coordonate, dimensiune.

Mai întâi, orice relaţie liniară care leagă vectorii $x, y, z, ...$ dintr-un subspaţiu $\mathcal{L}$ este adevărată şi pentru întreg spaţiul $\mathcal{K}$ şi reciproc; în particular, dependenţa liniară a vectorilor $x, y, z, ... \in \mathcal{L}$ are loc simultan în spaţiul $\mathcal{L}$ şi în spaţiul $\mathcal{K}$. Dacă de exemplu în spaţiul $\mathcal{K}$ orice $n+1$ vectori sunt liniar dependenţi, atunci această afirmaţie va fi cu atât mai mult adevărată în subspaţiul $\mathcal{L}$. De aici, rezultă că dimensiunea oricărui subspaţiu $\mathcal{L}$ al unui spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}$ nu depăşeşte numărul n. În acest caz, conform teoremei 1.3.2., în fiecare subspaţiu $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ se poate construi o bază formată din atâţia vectori din $\mathcal{L}$ cât dimensiunea subspaţiului $\mathcal{L}$.

Dacă în spaţiul $\mathcal{K}$ este fixată o bază $e_1, e_2, ..., e_n$, atunci este evident în general că nu se poate obţine o bază a subspaţiului $\mathcal{L}$ alegând direct o parte din vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$, pentru că se poate întâmpla ca nici unul din aceşti vectori să nu aparţină lui $\mathcal{L}$.

Proprietatea 1.4.1. *Vom arăta că dacă este fixată o bază $f_1, f_2, ..., f_l$ într-un subspaţiu $\mathcal{L}$ (având dimensiunea $l < n$), atunci întotdeauna se pot găsi vectorii $f_{l+1}, ..., f_n$ în $\mathcal{K}$ astfel încât sistemul $f_1, f_2, ..., f_n$ să constituie o bază a lui $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. În spaţiul $\mathcal{K}$ există vectori care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$ (care nu sunt combinaţii liniare ale acestor vectori); într-adevăr, dacă astfel de vectori nu ar exista, atunci vectorii $f_1, f_2, ..., f_l$ (presupuşi liniar independenţi) ar constitui o bază pentru spaţiul $\mathcal{K}$ şi conform teoremei 1.3.3. dimensiunea lui $\mathcal{K}$ ar fi egală cu l şi nu cu n. Notăm prin f_{l+1} un vector oarecare care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$. Arătăm că sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ este liniar independent.

Presupunem că $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ sunt liniar dependenţi: într-adevăr, dacă ar exista o relaţie de forma

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} = 0,$$

atunci în cazul când $\alpha_{l+1} \neq 0$, ar rezulta că f_{l+1} se exprimă liniar prin vectorii $f_1, f_2, ..., f_l$, iar în cazul când $\alpha_{l+1} = 0$, ar rezulta că vectorii $f_1, f_2, ..., f_l$, sunt liniar dependenţi şi ambele cazuri conduc la o contradicţie. Aşadar, sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ este liniar independent. Mai departe, dacă orice vector din $\mathcal{K}$ se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$, atunci sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$

formează o bază în $\mathcal{K}$ şi în acest caz $l+1=n$, iar construcţia cerută este încheiată. Dacă $l+1<n$, atunci există un vector f_{l+2} care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$. În acest mod se continuă construcţia şi după un număr finit de paşi ($n-l$ paşi) se obţine o bază a spaţiului $\mathcal{K}$. ■

Definiţia 1.4.2. *Vom spune că vectorii $g_1, g_2, ..., g_k$ din $\mathcal{K}$ sunt liniar independenţi peste un subspaţiu $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ dacă din faptul că*

$$\alpha_1 g_1 + ... + \alpha_k g_k \in \mathcal{L}\ , \alpha_j \in \mathbf{K}\ , j = 1, 2, ..., k$$

rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

Dacă $\mathcal{L}$ este subspaţiul nul, atunci liniar independenţa peste $\mathcal{L}$ revine la liniar independenţa obişnuită.Dependenţa liniară a vectorilor $g_1, g_2, ..., g_k$ peste subspaţiul $\mathcal{L}$ revine la existenţa unei combinaţii liniare $\alpha_1 g_1 + ... + \alpha_k g_k$ situată în $\mathcal{L}$, în care nu toţi coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sunt nuli.

Cel mai mare număr posibil de vectori din spaţiul $\mathcal{K}$, care sunt liniar independenţi peste subspaţiul $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, se numeşte dimensiunea lui $\mathcal{K}$ peste $\mathcal{L}$.

Proprietatea 1.4.2. *Dacă vectorii $g_1, g_2, ..., g_k$ sunt liniar independenţi peste un subspaţiu $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, iar $f_1, f_2, ..., f_l$ sunt vectori liniar independenţi în subspaţiul $\mathcal{L}$, atunci $g_1, g_2, ..., g_k, f_1, f_2, ..., f_l$ sunt liniar independenţi în spaţiul $\mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă ar avea loc o egalitate de forma

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l + \beta_1 g_1 + ... + \beta_k g_k = 0,$$

atunci scrisă sub forma

$$\beta_1 g_1 + ... + \beta_k g_k = -\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l\right) \in \mathcal{L},$$

ceea ce ar implica relaţiile $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$, deoarece $g_1, g_2, ..., g_k$ sunt liniar independenţi peste $\mathcal{L}$; mai departe, ar rezulta $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l = 0$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, în virtutea independenţei liniare a vectorilor $f_1, f_2, ..., f_l$. ■

Proprietatea 1.4.3. *Vectorii $f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_n$ construiţi în proprietatea 1.4.1. sunt liniar independenţi peste subspaţiul $\mathcal{L}$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă ar avea loc o egalitate de forma

$$\alpha_{l+1} f_{l+1} + \alpha_{l+2} f_{l+2} + ... + \alpha_n f_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l,$$

unde nu toţi coeficienţii $\alpha_{l+1}, ..., \alpha_n$ sunt nuli, atunci vectorii $f_1, f_2, ..., f_n$ ar fi liniar dependenţi, contrar construcţiei făcute. Aşadar, dimensiunea spaţiului $\mathcal{K}$ peste $\mathcal{L}$ nu este mai mică decât $n-l$. Pe de altă parte, ea nu poate fi nici mai mare decât $n-l$, deoarece dacă ar exista $n-l+1$ vectori, de exemplu $h_1, ..., h_{n-l+1}$, liniar independenţi peste $\mathcal{L}$, atunci în spaţiul $\mathcal{K}$ ar fi liniar independenţi vectorii $h_1, ..., h_{n-l+1}$, $f_1, f_2, ..., f_l$, al căror număr este mai mare decât n. Aşadar, dimensiunea lui $\mathcal{K}$ peste $\mathcal{L}$ este egală cu $n - l$, în cazul considerat. ■

1.5 Sumă directă.

Definiţie 1.5.1. *Se spune că spaţiul $\mathcal{L}$ este suma directă a subspaţiilor $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_m$ dacă:*

a) *pentru orice $x \in \mathcal{L}$ există o descompunere de forma $x = x_1 + ... + x_m$, unde $x_1 \in \mathcal{L}_1, ..., x_m \in \mathcal{L}_m$ (ceea ce reprezintă şi definiţia sumei de subspaţii vectoriale);*

b) *această descompunere este unică: dacă $x = x_1 + ... + x_m = y_1 + ... + y_m$ şi dacă $x_j \in \mathcal{L}_j$, $y_j \in \mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, ..., m$, atunci $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, ..., x_m = y_m$.*

Condiţia b) rezultă din următoarea condiţie mai simplă:

b') *dacă are loc o descompunere a lui $0 = z_1 + ... + z_m$, unde $z_1 \in \mathcal{L}_1, ..., z_m \in \mathcal{L}_m$, atunci $z_1 = ... = z_m = 0$.*

Într-adevăr, dacă este îndeplinită condiţia b') şi se consideră descompunerea de la b), atunci

$$0 = (x_1 - y_1) + ... + (x_m - y_m) ,$$

şi aplicând b') se obţine $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, ..., x_m = y_m$. De fapt condiţiile de la punctul b) şi b') sunt echivalente, deoarece şi b') rezultă din b) punând $x = 0, x_1 = ... = x_m = 0$.

Proprietatea 1.5.1. *Din b) rezultă că oricare ar fi două din subspaţiile $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_m$ ale lui $\mathcal{L}$, ele au în comun doar elementul* 0.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă am avea $z \in \mathcal{L}_k$ şi $z \in \mathcal{L}_j$, atunci din compararea descompunerilor

$$z = z + 0, z \in \mathcal{L}_j, 0 \in \mathcal{L}_k,$$

$$z = 0 + z, 0 \in \mathcal{L}_j, z \in \mathcal{L}_k,$$

şi din condiţia b), ar rezulta că $z = 0$. ■

Aşadar, orice spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ este o sumă directă a n subspaţii unidimensionale, definite de orice n vectori liniari independenţi. Mai mult, spaţiul $\mathcal{K}_n$ poate fi reprezentat în moduri distincte sub forma unei sume directe de subspaţii de dimensiuni mai mari decât 1. Fixăm un subspaţiu $\mathcal{L}$ într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$.

Proprietatea 1.5.2. *Întotdeauna există un subspaţiu $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_n$ a cărui sumă directă cu $\mathcal{L}$ este egală cu întreg spaţiul $\mathcal{K}_n$.*

Demonstraţie. Folosim vectorii $f_{l+1}, ..., f_n$ construiţi în proprietatea 1.4.1., care sunt liniar independenţi peste subspaţiul $\mathcal{L}$. Fie $\mathcal{M}$ subspaţiul format din toate combinaţiile liniare ale vectorilor $f_{l+1}, ..., f_n$; arătăm că acesta satisface condiţia cerută. Într-adevăr, deoarece vectorii $f_1, ..., f_n$ constituie o bază în $\mathcal{K}_n$ (a se vedea proprietatea 1.4.1.), fiecare vector $x \in \mathcal{L}$ admite o descompunere de forma

$$x = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} + ... + \alpha_n f_n = y + z,$$

unde $y = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l \in \mathcal{L}$, $z = \alpha_{l+1} f_{l+1} + ... + \alpha_n f_n \in \mathcal{M}$.

Din condiţia $x = 0$ rezultă $\alpha_j = 0\,(j = 1, 2, ..., n)$, conform independenţei liniare a vectorilor $f_1, ..., f_n$. Aşadar, condiţiile a) şi b) de la sumă directă sunt îndeplinite şi $\mathcal{K}_n$ este suma directă a subspaţiilor $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$. ■

1. În continuare se consideră subspaţiile $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_m$, cu dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}_k$ egală cu r_k $(k = 1, ..., m)$, iar în fiecare spaţiu $\mathcal{L}_k$ sunt puşi în evidenţă câte r_k vectori liniari independenţi $f_{k_1}, ..., f_{k_{r_k}}$. În aceste condiţii orice vector x al sumei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + ... + \mathcal{L}_m$ poate fi exprimat liniar prin aceşti vectori, sau altfel spus are loc următoarea proprietate.

Proprietatea 1.5.3. *Dimensiunea sumei subspaţiilor $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_m$ nu este mai mare decât suma dimensiunilor lor. Dacă suma $\mathcal{L}_1 + ... + \mathcal{L}_m$ este directă, atunci toţi vectorii $f_{k_1}, ..., f_{k_{r_k}}$ $(k = 1, ..., m)$ sunt liniar independenţi şi în acest caz dimensiunea sumei este suma dimensiunilor.*

2. În cazul general, dimensiunea sumei se determină în funcţie de dimensiunile termenilor într-un mod mai complicat; considerăm cazul dimensiunii sumei a două subspaţii finit dimensionale $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$ ale spaţiului $\mathcal{K}$.

Fie p dimensiunea lui $\mathcal{P}$ şi q dimensiunea lui $\mathcal{Q}$. Notăm cu $\mathcal{L}$ intersecţia subspaţiilor $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$ şi cu l dimensiunea sa. Alegem o bază $e_1, e_2, ..., e_l$ a lui $\mathcal{L}$ şi folosind cele spuse la proprietatea 1.4.1., completăm aceşti vectori prin $f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_p$ până la o bază a spaţiului $\mathcal{P}$ şi prin vectorii $g_{l+1}, g_{l+2}, ..., g_q$ până la o bază a subspaţiului $\mathcal{Q}$. Fiecare vector al sumei $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ este prin definiţie suma unui vector din $\mathcal{P}$ cu unul din $\mathcal{Q}$, deci el poate fi exprimat liniar prin vectorii $e_1, e_2, ..., e_l$, $f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_p, g_{l+1}, g_{l+2}, ..., g_q$. Arătăm că aceşti vectori constituie o bază a subspaţiului $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$. Pentru aceasta rămâne să probăm doar independenţa lor liniară. Admitem prin absurd că ar exista o relaţie liniară de forma

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_l e_l + \beta_{l+1} f_{l+1} + ... + \beta_p f_p + \gamma_{l+1} g_{l+1} + ... + \gamma_q g_q = 0, \quad (1.5.1)$$

unde nu toţi coeficienţii $\alpha_1, ..., \gamma_q$ sunt nuli. Atunci numerele $\gamma_{l+1}, ..., \gamma_q$ nu pot să fie toate nule căci altfel vectorii $e_1, e_2, ..., e_l$, $f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_p$ ar fi liniar dependenţi (ceea ce contravine faptului că ei constituie o bază a subspaţiului $\mathcal{P}$). Prin urmare, vectorul

$$x = \gamma_{l+1} g_{l+1} + ... + \gamma_q g_q \neq 0 \quad (1.5.2)$$

este nenul (altfel ar rezulta că vectorii $g_{l+1}, g_{l+2}, ..., g_q$ sunt liniar dependenţi). Din relaţia (1.5.1) deducem

$$-x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_l e_l + \beta_{l+1} f_{l+1} + ... + \beta_p f_p \in \mathcal{P},$$

iar din (1.5.2) rezultă $x \in \mathcal{Q}$. Prin urmare x aparţine şi lui $\mathcal{P}$ şi lui $\mathcal{Q}$, deci $x \in \mathcal{L}$. Dar atunci

$$x = \gamma_{l+1} g_{l+1} + ... + \gamma_q g_q = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_l e_l \ .$$

Deoarece vectorii $e_1, e_2, ..., e_l, g_{l+1}, g_{l+2}, ..., g_q$ sunt liniar independenţi (bază pentru $\mathcal{Q}$), rezultă că $\gamma_{l+1} = ... = \gamma_q = 0$. Contradicţia obţinută arată că vectorii $e_1, e_2, ..., e_l,\ f_{l+1}, f_{l+2}, ..., f_p, g_{l+1}, g_{l+2}, ..., g_q$ sunt liniar independenţi, adică formează o bază pentru $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$. Conform teoremei 1.3.3. (de la „bază, coordonate, dimensiune") dimensiunea subspaţiului $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ este egală cu numărul vectorilor unei baze, adică $p + q - l$.

Proprietatea 1.5.4. *Dimensiunea sumei a două subspaţii este egală cu suma dimensiunilor lor din care se scade dimensiunea intersecţiei.*

3. Corolarul 1.5.1. *Dacă într-un spaţiu n-dimensional (real) $\mathcal{R}_n$ se consideră două subspaţii $\mathcal{R}_p$ şi $\mathcal{R}_q$ de dimensiune p şi respectiv q ($p+q \geqslant n$), atunci intersecţia $\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q$ are dimensiunea cel puţin egală cu $p + q - n$.*

1.6 Acoperiri liniare.

Un mijloc important de a construii subspaţii îl constituie formarea acoperirii liniare a unui sistem fixat de vectori.

Fie $x, y, z, ...$ un sistem de vectori din spaţiul vectorial $\mathcal{K}_n$.

Definiţie 1.6.1. *Acoperirea (sau înfăşurătoarea, sau anvelopa) liniară a sistemului $x, y, z, ...$ este prin definiţie mulţimea tuturor combinaţiilor liniare (finite)*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + ... \tag{1.6.1}$$

cu coeficienţii $\alpha, \beta, \gamma, ...$din corpul $\mathbf{K}$.

Se arată uşor că acoperirea liniară a sistemului $x, y, z, ...$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{K}_n$. Acest subspaţiu conţine evident vectorii $x, y, z, ...$ Pe de altă parte, orice subspaţiu conţinând vectorii $x, y, z, ...$ conţine toate combinaţiile lor liniare (1.6.1);

Definiţie 1.6.2. *Acoperirea liniară a vectorilor $x, y, z, ...$ este cel mai mic subspaţiu care conţine aceşti vectori.*

Acoperirea liniară a vectorilor $x, y, z, ...$ se notează prin $\mathcal{L}(x, y, z, ...)$.

Exemplul 1.6.1. Acoperirea liniară a vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$ formează un spaţiu $\mathcal{K}'$ care coincide cu întreg spaţiul $\mathcal{K}$.

Exemplul 1.6.2. Acoperirea liniară a unei perechi de vectori (necoliniari) din spaţiul $\mathbf{E}_3$ constă din toţi vectorii paraleli cu planul format de cei doi vectori.

Exemplul 1.6.3. Acoperirea liniară a sistemului de funcţii $1, t, t^2, ..., t^k$ din spaţiul $\mathbf{K}(a, b)$ ($\mathbf{K}$ fiind $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$) coincide cu mulţimea tuturor polinoamelor în variabila t de grad cel mult k.

Acoperirea liniară a sistemului infinit de funcţii $1, t, t^2, ...$ constă din toate polinoamele (de orice grad) în variabila t cu coeficienţi din corpul $\mathbf{K}$.

Subliniem două proprietăţi ale acoperirilor liniare.

Lema 1.6.1. *Dacă vectorii $x', y', z', ...$ aparţin acoperirii liniare a vectorilor $x, y, z, ...$, atunci acoperirea liniară $\mathcal{L}(x', y', z', ...)$ este conţinută în acoperirea liniară $\mathcal{L}(x, y, z, ...)$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din faptul că vectorii $x', y', z', ...$ aparţin subspaţiului $\mathcal{L}(x, y, z, ...)$ rezultă că orice combinaţie liniară a lor, adică toate elementele acoperirii liniare $\mathcal{L}(x', y', z', ...)$, aparţin de asemenea subspaţiului $\mathcal{L}(x, y, z, ...)$. ■

Lema 1.6.2. *Orice vector al sistemului $x, y, ...$ care depinde liniar de ceilalţi vectori ai acestui sistem poate fi eliminat fără modificarea acoperirii liniare.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă de exemplu, vectorul x depinde liniar de vectorii $y, z, ...$, aceasta înseamnă că vectorul $x \in \mathcal{L}(y, z, ...)$. Folosind concluzia anterioară şi lema 1.6.1. rezultă că $\mathcal{L}(x, y, z, ...) \subset \mathcal{L}(y, z, ...)$. Pe de altă parte, este evident că $\mathcal{L}(y, z, ...) \subset \mathcal{L}(x, y, z, ...)$. Rezultă atunci că $\mathcal{L}(y, z, ...) = \mathcal{L}(x, y, z, ...)$, adică ceea ce trebuia dovedit. ■

În continuare ne punem problema construirii unei baze a acoperirii liniare şi a determinării dimensiunii acoperirii. În rezolvarea acestei probleme vom presupune că numărul vectorilor $x, y, ...$ care generează acoperirea liniară $\mathcal{L}(x, y, ...)$ este finit (deşi unele din rezultate nu cer în mod esenţial această ipoteză).

Presupunem că printre vectorii $x, y, ...$ care generează acoperirea liniară $\mathcal{L}(x, y, ...)$ se pot găsi r vectori liniar independenţi pe care îi notăm cu $x_1, x_2, ..., x_r$ şi prin care poate fi exprimat liniar orice vector din sistemul $x, y, ...$.

Proprietatea 1.6.1. *În acest caz putem afirma că vectorii $x_1, x_2, ..., x_r$ formează bază a spaţiului $\mathcal{L}(x, y, ...)$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, orice vector $z \in \mathcal{L}(x, y, ...)$ poate fi exprimat liniar printr-un număr finit de vectori din sistemul $x, y, ...$ dar fiecare din vectorii acestui sistem se exprimă liniar prin $x_1, x_2, ..., x_r$, de aceea în final vectorul z poate fi exprimat liniar direct prin vectorii $x_1, x_2, ..., x_r$.

În conjuncţie cu ipoteza independenţei liniare a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_r$, rezultă că ambele condiţii din definiţia bazei sunt îndeplinite şi $x_1, x_2, ..., x_r$

formează bază pentru $\mathcal{L}(\ x, y, ...)$. ■

Conform teoremei 1.3.3. (de la „bază, coordonate, dimensiune") dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}(\ x, y, ...)$ este egală cu r. Deoarece într-un spaţiu r-dimensional nu pot exista mai mult de r vectori liniar independenţi, relativ la dimensiunea r a spaţiului $\mathcal{L}(\ x, y, ...)$ se pot face următoarele observaţii.

Observaţia 1.6.1. Dacă numărul vectorilor generatori $x, y, ...$ este mai mare decât r atunci vectorii $x, y, ...$sunt liniari dependenţi; dacă numărul lor este egal cu r, atunci ei sunt liniar independenţi.

Observaţia 1.6.2. Orice $r + 1$ vectori din sistemul $x, y, ...$ sunt liniar dependenţi.

Observaţia 1.6.3. Dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}(\ x, y, ...)$ se poate defini ca numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $x, y, ...$.

1.7 Lema substituţiei şi aplicaţii.

Definiţie 1.7.1. *Aplicaţia bijectivă $\beta : \mathcal{K}_n \to \mathbf{K}_n$ care asociază fiecărui vector $x \in \mathcal{K}_n$, elementul $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{K}_n$, format din coordonatele sale în baza B, se numeşte sistem de coordonate pe $\mathcal{K}_n$ definit de* **B**.

În acest caz $\mathbf{K}_n$ se mai numeşte şi modelul aritmetic al spaţiului $\mathcal{K}_n$.

Lema substituţiei. Dacă **B**$= \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază în $\mathcal{K}_n$ peste **K**, iar $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, considerând **B'**$= \{e_1, ..., e_{i-1}, y, e_{i+1}, ..., e_n\}$, atunci:

a) **B'** este o altă bază a lui $\mathcal{K}_n$ dacă şi numai dacă $\alpha_i \neq 0$;

b) **B'** fiind bază în $\mathcal{K}_n$, între coordonatele (x'_k) în **B'** şi coordonatele (x_h) în **B** $(k, h = 1, 2, ..., n)$, ale unui vector oarecare $x \in \mathcal{K}_n$ există relaţiile:

$$x'_i = \frac{x_i}{\alpha_i} \quad \text{şi} \quad x'_k = x_k - \frac{\alpha_k x_i}{\alpha_i}\ ,\ k \neq i.$$

Demonstraţie. Arătăm că **B'** se încadrează în definiţia bazei. Presupunem că avem

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_i y + \lambda_{i+1} e_{i+1} + ... + \lambda_n e_n = 0;$$

înlocuind pe y rezultă: $(\lambda_1 + \lambda_i \alpha_1) e_1 + ... + (\lambda_{i-1} + \lambda_i \alpha_{i-1}) e_{i-1} + \lambda_i \alpha_i e_i + (\lambda_{i+1} + \lambda_i \alpha_{i+1}) e_{i+1} + ... + (\lambda_n + \lambda_i \alpha_n) e_n = 0$. Având în vedere faptul că **B** este bază în $\mathcal{K}_n$ rezultă că toţi coeficienţii vectorilor $e_1, ..., e_n$ sunt egali cu zero, adică

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_i \alpha_1 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_i \alpha_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{i-1} + \lambda_i \alpha_{i-1} = 0, \\ \lambda_i \alpha_i = 0, \\ \lambda_{i+1} + \lambda_i \alpha_{i+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n + \lambda_i \alpha_n = 0, \end{cases} \tag{1.7.1}$$

sistem liniar şi omogen în λ_1, $\lambda_2, ...,$ λ_n.

Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} & & & & & (i) & & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{i-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_{i+1} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_n & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ (i) \\ \\ \end{array} \end{array} .$$

Dezvoltând Δ după linia (i), rezultă $\Delta = \alpha_i$. După regula lui Cramer sistemul (1.7.1) are soluţia banală dacă şi numai dacă $\Delta = \alpha_i \neq 0$, deci rezultă condiţia a).

Demonstrăm condiţia b). Fie un vector x din $\mathcal{K}_n$ pe care îl reprezentăm atât în baza **B** cât şi în baza **B'**, adică:

$$x = \sum_{h=1}^{n} x_h e_h \tag{1.7.2}$$

şi

$$x = x_1' e_1 + ... + x_{i-1}' e_{i-1} + x_i' y + x_{i+1}' e_{i+1} + ... + x_n' e_n.$$

Înlocuind pe $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ în ultima relaţie şi ţinând seama că $\alpha_i \neq 0$ se obţine:

$$x = (x_1' + x_i' \alpha_1) e_1 + ... + (x_{i-1}' + x_i' \alpha_{i-1}) e_{i-1} + x_i' \alpha_i e_i + ... + (x_n' + x_i' \alpha_n) e_n. \tag{1.7.3}$$

Egalând relaţiile (1.7.2) şi (1.7.3) se obţin relaţiile cerute de condiţia b). ■

Teorema înlocuirii. *Fie* **B**$= \{e_1, ..., e_n\}$ *o bază a spaţiului* $\mathcal{K}_n$ *şi sistemul de vectori liniar independenţi* **S**$= \{y_1, ..., y_l\}, y_i \in \mathcal{K}_n$ $(i = 1, ..., l)$. *Atunci:*

a) $l \leq n$;

b) *înlocuind* l *vectori din baza* **B** *prin vectorii sistemului* **S**, *se obţine o nouă bază în* $\mathcal{K}_n$.

Demonstraţie. Evident vectorii y_i sunt nenuli $(i = 1, ..., l)$, deoarece dacă am avea de exemplu $y_h = 0$ $(1 \leq h \leq l)$, atunci sistemul **S** ar fi liniar dependent deoarece: $0y_1 + ... + 0y_{h-1} + \alpha y_h + 0y_{h+1} + ... + 0y_l = 0$, cu $\alpha \neq 0$.

Demonstraţia teoremei se face prin inducţie şi anume: $y_1 = \alpha_1^1 e_1 + ... + \alpha_2^1 e_2 + ... + \alpha_n^1 e_n$ $(y_1 \in \mathcal{K}_n$, iar **B** este o bază în $\mathcal{K}_n)$. Presupunem că $\alpha_1^1 \neq 0$ şi aplicând lema substituţiei obţinem baza $\mathbf{B}_1 = \{y_1, e_2, ...e_n\}$. Dacă $l = 1$ atunci lema este demonstrată. Dacă $l > 1$, atunci îl descompunem pe y_2 în funcţie de baza $\mathbf{B}_1$ şi procedăm ca mai înainte, ajungând la baza $\mathbf{B}_2 = \{y_1, y_2, e_2, ...e_n\}$ ş.a.m.d. până ajungem la baza $\mathbf{B}_l = \{y_1, y_2, ..., y_l, e_{l+1}, ...e_n\}$.

Dacă $l > n$, ar însemna că vectorii $y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_l$ să se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathbf{B}_n = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, adică **S** nu ar mai fi un sistem de vectori liniar independenţi, deci $l \leq n$. ■

Ca o consecinţă a teoremei înlocuirii are loc.

Teorema bazei. *Numărul vectorilor din orice bază a unui spaţiu vectorial* $\mathcal{K}_n$ *de dimensiune finită, este invariant.*

Demonstraţie. Dacă am avea **B**$= \{e_1, ..., e_n\}$ şi **B'**$= \{e'_1, ..., e'_m\}$ două baze în $\mathcal{K}_n$, considerând în teorema înlocuirii drept bază pe **B** şi pe **S**=**B'** ar rezulta că $m \leq n$, iar dacă am proceda invers, adică baza să fie **B'** şi **S**=**B** am obţine $n \leq m$. Din cele două inegalităţi se obţine că $m = n$. ■

1.8 Transformarea coordonatelor unui vector.

Fie **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi **B'**$= \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ două baze într-un spaţiu vectorial n-dimensional $\mathcal{K}_n$. Orice vector $x \in \mathcal{K}_n$ poate fi reprezentat sub forma

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + ... + \eta_n f_n, \tag{1.8.1}$$

unde numerele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x relativ la baza **B**, iar numerele $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ sunt coordonatele lui x relativ la baza **B'**. Ne propunem să calculăm coordonatele vectorului x relativ la baza **B'** cunoscând coordonatele lui x relativ la baza **B**. Presupunem că este dată matricea $P = \left(p_i^{(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ de trecere de la baza **B** la baza **B'**. Atunci vectorii bazei **B** se exprimă cu ajutorul vectorilor bazei **B'** prin formulele

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} q_k^{(j)} f_k \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{1.8.2}$$

unde $Q = \left(q_k^{(j)}\right)_{1 \leq k,j \leq n}$ este matricea inversă a matricii P.

Înlocuind relaţiile (1.8.2) în (1.8.1) se obţine $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k f_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k^{(j)} f_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} q_k^{(j)} \xi_j \right) f_k$, de unde în virtutea unicităţii descompunerii vectorului x în baza **B'**, deducem

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} q_k^{(j)} \xi_j \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{1.8.3}$$

Adică explicit rezultă sistemul de egalităţi

$$\begin{cases} \eta_1 = q_1^{(1)} \xi_1 + q_1^{(2)} \xi_2 + ... + q_1^{(n)} \xi_n, \\ \eta_2 = q_2^{(1)} \xi_1 + q_2^{(2)} \xi_2 + ... + q_2^{(n)} \xi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = q_n^{(1)} \xi_1 + q_n^{(2)} \xi_2 + ... + q_n^{(n)} \xi_n. \end{cases}$$

Ca o consecinţă a celor prezentate au loc următoarele rezultate.

Teorema 1.8.1. *Coordonatele unui vector x relativ la baza* **B'** *se exprimă liniar cu ajutorul coordonatelor lui x relativ la baza* **B**; *coeficienţii acestor expresii liniare formează o matrice, care este transpusa matricii de trecere de la baza* **B'** *la baza* **B** *(adică transpusa inversei matricii P).*

Folosind notaţia P^{-1} pentru matricea inversă şi notând cu S matricea definită prin relaţiile (1.8.3), rezultă $S = (P^{-1})^t$. Are loc şi teorema inversă.

Teorema 1.8.2. *Fie $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ coordonatele unui vector oarecare x relativ la o bază* **B**= $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *a unui spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ şi numerele $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ definite prin*

$$\begin{cases} \eta_1 = s_{11} \xi_1 + s_{12} \xi_2 + ... + s_{1n} \xi_n, \\ \eta_2 = s_{21} \xi_1 + s_{22} \xi_2 + ... + s_{2n} \xi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = s_{n1} \xi_1 + s_{n2} \xi_2 + ... + s_{nn} \xi_n, \end{cases}$$

unde $det(s_{jk})_{1 \leq j,k \leq n} \neq 0$. Atunci în spaţiul $\mathcal{K}_n$ se poate găsi o nouă bază **B'**= $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *astfel încât numerele $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ să devină coordonatele vectorului x relativ la baza* **B'**.

Demonstraţie. Considerăm matricea $S = (s_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ şi fie matricea $P = (S^t)^{-1}$ ale cărei elemente le notăm cu $p_i^{(j)}$. Cu ajutorul matricii P construim o nouă bază prin formulele $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)} e_i$.

Afirmăm că această bază este cea căutată. Într-adevăr, considerăm formulele de trecere (1.8.3) de la coordonatele vectorului x relativ la noua bază. După cum s-a văzut, aceste formule se scriu cu ajutorul matricii $(P^{-1})^t$. Dar această matrice coincide cu S deoarece $(P^{-1})^t = \left(\left[(S^t)^{-1}\right]^{-1}\right)^t = (S^t)^t = S$. Aşadar, numerele $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ şi coordonatele vectorului x relativ la baza **B'** sunt unul şi acelaşi lucru, oricare ar fi x. ■

Observaţia 1.8.1. Posibilitatea determinării coordonatelor unui vector x într-o bază **B'** a unui spaţiu vectorial $\mathcal{K}_n$, cunoscându-se o altă bază **B** a aceluiaşi spaţiu, matricea de legătură între elementele celor două baze şi coordonatele vectorului x în baza **B** (precum şi posibilitatea de a alege de la început drept coordonate pentru vectorul x numere ce îndeplinesc anumite condiţii în raport cu coordonatele sale în baza **B** -cu determinarea ulterioară a bazei **B'**), este folosită în diverse probleme de fizică, astronomie, mecanică, atunci când utilizarea unui reper convenabil conduce la reducerea calculelor şi implicit la o formă uneori mai simplă a expresiilor care apar.

Capitolul 2

Morfisme de spaţii vectoriale.

2.1 Morfisme: definiţie, exemple, proprietăţi.

Definiţia 2.1.1. *Presupunem că fiecărui vector x' al unui spaţiu vectorial $\mathcal{K}'$ îi corespunde, după o anumită regulă ϖ, un vector bine determinat x'' dintr-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}''$. Regula ϖ se numeşte morfism (sau operator liniar) dacă sunt îndeplinite următoarele relaţii:*

a) $\varpi(x'+y') = \varpi(x') + \varpi(y')$ *pentru orice* x', y' *din* $\mathcal{K}'$;

b) $\varpi(\alpha x') = \alpha\varpi(x')$ *pentru orice* $x' \in \mathcal{K}', \alpha \in \mathbf{K}$ *(* $\mathbf{K}$ *este corpul peste care este definit spaţiul vectorial).*

Dacă morfismul ϖ aplică spaţiul $\mathcal{K}'$ pe întreg spaţiul $\mathcal{K}''$ (adică este aplicaţie surjectivă), atunci ϖ este **epimorfism**. Dacă morfismul ϖ este aplicaţie injectivă ($x' \neq y'$ implică $\varpi(x') \neq \varpi(y')$), atunci el se numeşte **monomorfism**. Dacă morfismul ϖ stabileşte o corespondenţă biunivocă între spaţiile $\mathcal{K}'$ şi $\mathcal{K}''$, adică este simultan monomorfism şi epimorfism, atunci ϖ se numeşte **izomorfism**, iar spaţiile $\mathcal{K}'$ şi $\mathcal{K}''$ însele se numesc izomorfe (sau mai exact **K**-izomorfe).

Notaţia pentru morfismul între spaţiile vectoriale $\mathcal{K}'$ şi $\mathcal{K}''$ va fi $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$.

Exemplul 2.1.1. Fie $\mathcal{L}$ un subspaţiu al unui spaţiu $\mathcal{K}$. Aplicaţia ϖ care asociază fiecărui vector $x \in \mathcal{L}$ acelaşi vector x în spaţiul $\mathcal{K}$, este un morfism între spaţiile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{K}$ şi anume un monomorfism (dacă $\mathcal{L} \neq \mathcal{K}$, acest morfism nu este epimorfism). Acest morfism $\varpi : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ se numeşte scufundarea lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{K}$.

Exemplul 2.1.2. Fie $\mathcal{L}$ un subspaţiu al unui spaţiu $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{K}/\mathcal{L}$ spaţiul cât al spaţiului $\mathcal{K}$ prin subspaţiul $\mathcal{L}$ (un element $x \in \mathcal{K}$ se numeşte congruent cu un element $y \in \mathcal{K}$, congruent relativ la $\mathcal{L}$, dacă $x - y \in \mathcal{L}$. Evident, în acest caz y este şi el congruent cu x, deci relaţia de congruenţă este simetrică. Orice $x \in \mathcal{K}$ este congruent cu el însuşi. Apoi, dacă x este congruent cu y şi y este congruent cu z, atunci x este congruent cu z, deoarece $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathcal{L}$. Mulţimea tuturor elementelor $y \in \mathcal{L}$ congruente cu un element fixat $x \in \mathcal{K}$ se numeşte clasa lui x şi se notează cu X. Întreg spaţiul $\mathcal{K}$ se descompune într-o reuniune de clase disjuncte $X, Y, \ldots$. Colecţia acestor clase se va nota $\mathcal{K}/\mathcal{L}$). Aplicaţia ϖ care asociază oricărui vector $x \in \mathcal{K}$ clasa corespunzătoare $X \subset \mathcal{K}/\mathcal{L}$, conţinând elementul x, este un morfism de la $\mathcal{K}$ în $\mathcal{K}/\mathcal{L}$ şi anume un epimorfism (dacă $\mathcal{L} \neq 0$ acest morfism ϖ nu este monomorfism). Acest morfism ϖ se numeşte aplicaţia canonică a lui $\mathcal{K}$ pe $\mathcal{K}/\mathcal{L}$.

Presupunem că spaţiul $\mathcal{K}'$ este n-dimensional având baza $e'_1, ..., e'_n$. În spaţiul $\mathcal{K}''$ alegem în mod arbitrar vectorii $e''_1, ..., e''_n$. Oricărui vector $x' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e'_k \in \mathcal{K}'$ îi asociem vectorul $\varpi(x') = x'' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, cu aceiaşi coeficienţi $\xi_k \ (k = 1, 2, ..., n)$.

Proprietatea 2.1.1. *Aplicaţia ϖ definită anterior este un morfism al spaţiului $\mathcal{K}'$ în spaţiul $\mathcal{K}''$.*

Demonstraţie. Presupunem pentru aceasta că în spaţiul $\mathcal{K}'$ sunt fixaţi doi vectori $x' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e'_k$ şi $y' = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e'_k$; atunci

$$x' + y' = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k) e'_k.$$

Conform definiţiei lui ϖ are loc $\varpi(x') = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, $\varpi(y') = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e''_k$. Pe de altă parte $\varpi(x' + y') = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k) e''_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e''_k = \varpi(x') + \varpi(y')$şi astfel condiţia a) din definiţia morfismului este îndeplinită. În mod similar, pentru orice $\alpha \in \mathbf{K}$, avem $\varpi(\alpha x') = \varpi\left(\alpha \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e'_k\right) = \varpi\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha \xi_k e'_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha \xi_k e''_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k = \alpha \varpi(x')$, deci este îndeplinită şi condiţia b) din definiţia morfismului şi ϖ reprezintă astfel un morfism de la $\mathcal{K}'$ la $\mathcal{K}''$. ■

Indicăm în ce condiţii morfismul ϖ descris la proprietatea 2.1.1. este epimorfism.

Proprietatea 2.1.2. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ϖ să fie epimorfism este ca orice vector $x'' \in \mathcal{K}''$ să poată fi reprezentat sub forma $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, cu alte cuvinte, $\mathcal{K}''$ să coincidă cu înfăşurătoarea liniară a vectorilor $e''_1, ..., e''_n$.*

Demonstraţie. În baza modului de definire a morfismului ϖ, pentru orice vector $x'' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k \in \mathcal{K}''$, există vectorul $x' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e'_k \in \mathcal{K}'$, astfel încât $\varpi(x') = x''$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\mathcal{K}'' = \mathcal{L}(e''_1, ..., e''_n)$. ■

Indicăm condiţii în care morfismul ϖ descris la proprietatea 2.1.1. este monomorfism.

Proprietatea 2.1.3. *Condiţia necesară şi suficientă ca ϖ să fie monomorfism este ca vectorii $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e''_k$ care diferă cel puţin într-o pereche de coordonate (adică există k astfel încât $\xi_k \neq \eta_k$) să fie vectori distincţi din spaţiul $\mathcal{K}''$(ceea ce este echivalent cu liniar independenţa vectorilor $e''_1, ..., e''_n$).*

Deci, morfismul ϖ este monomorfism dacă şi numai dacă vectorii $e''_1, ..., e''_n$ sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Fie $x', y' \in \mathcal{K}'$, $x' = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e'_k$, $y' = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e'_k$. Morfismul ϖ este monomorfism dacă din faptul că $\varpi(x') = \varpi(y')$rezultă că $x' = y'$. Egalitatea $\varpi(x') = \varpi(y')$ este echivalentă cu $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e''_k$, adică $\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k) e''_k = 0$. Cunoscând că $x' = y'$ deci $\xi_k = \eta_k$ rezultă că $\{e''_1, ..., e''_n\}$ sunt liniar independenţi. Reciproc, dacă $\{e''_1, ..., e''_n\}$ sunt liniar independenţi, atunci egalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k) e''_k = 0$ implică $\xi_k = \eta_k$ (şi $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e''_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e''_k$, sau altfel scris $\varpi(x') = \varpi(y')$) pentru orice $k = 1, 2, ..., n$. Aşadar, $x' = y'$ şi deci ϖ este monomorfism. Echivalenţa este dovedită. ■

Proprietatea 2.1.4. *Morfismul ϖ descris în proprietatea 2.1.1. este izomorfism dacă şi numai dacă $\{e''_1, ..., e''_n\}$ sunt liniar independenţi şi înfăşurătoarea lor liniară coincide cu întreg spaţiul $\mathcal{K}''$.*

Cu alte cuvinte, morfismul ϖ este izomorfism dacă şi numai dacă vectorii $\{e''_1, ..., e''_n\}$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{K}''$.

În continuare vom introduce noţiunea de formă liniară sau operator liniar şi vom arăta cum poate fi studiată noţiunea de morfism şi proprietăţile acesteia, cu ajutorul operatorilor liniari.

Definiţia 2.1.2. *O funcţie numerică $L(x)$ de argument vectorial x, definită pe un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ peste un corp $\mathbf{K}$ (numeric), se numeşte formă liniară dacă ea îndeplineşte următoarele condiţii:*

a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathcal{K}$;

b) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$ *şi pentru orice* $\alpha \in \mathbf{K}$.

Cu alte cuvinte, o formă liniară $L(x)$ este un morfism al spaţiului vectorial $\mathcal{K}$ în spaţiul unidimensional $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$.

Din condiţiile a) şi b) se obţine imediat prin inducţie formula

$$L(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) = \alpha_1 L(x_1) + ... + \alpha_k L(x_k), \tag{2.1.1}$$

adevărată pentru orice $x_1, ..., x_k \in \mathcal{K}$ şi pentru orice $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbf{K}$.

Exemplul 2.1.3. Într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}$ se fixează o bază; atunci fiecare vector $x \in \mathcal{K}$ poate fi exprimat prin coordonatele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Funcţia L definită prin $L(x) = \xi_1$ (prima coordonată) este evident o formă liniară de x.

Exemplul 2.1.4. O formă liniară mai generală în acelaşi spaţiu este definită prin

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k \xi_k,$$

cu fixarea arbitrară a coeficienţilor $l_1, l_2, ..., l_n$.

Exemplul 2.1.5. În spaţiul $K(a, b)$, unde K este $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$, un exemplu de formă liniară îl constituie funcţia L dată prin

$$L(x) = x(t_0),$$

unde t_0 este un punct fixat în intervalui $[a, b]$.

Exemplul 2.1.6. În acelaşi spaţiu se poate considera forma liniară de tipul

$$L(x) = \int_a^b l(t)x(t)dt,$$

unde $l(t)$ este o funcţie continuă fixată.

Formele liniare definite în spaţii infinit dimensionale se numesc de obicei funcţionale liniare.

Determinăm forma generală a unei forme liniare $f(x)$ într-un spaţiu vectorial n-dimensional $\mathcal{K}_n$. Fie $e_1, ..., e_n$ o bază oarecare a spaţiului $\mathcal{K}_n$. Notăm numărul $f(e_k)$ prin definiţie cu l_k $(k = 1, 2, ..., n)$. Atunci pentru orice $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ **,** în virtutea formulei (2.1.1), rezultă

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} l_k \xi_k,$$

adică valorile formei liniare $f(x)$ se exprimă liniar prin coordonatele vectorului x cu coeficienţii $l_1, ..., l_n$.

Într-un spaţiu vectorial complex $\mathcal{C}$ se poate considera încă un tip de formă liniară, numită formă de genul II (sau formă antiliniară). Orice formă liniară prezentată ca în definiţia 2.1.2. se numeşte formă de genul I. O funcţie numerică $L(x)$ de argument x, definită pe un spaţiu vectorial complex $\mathcal{C}$, se numeşte formă liniară de genul II dacă ea îndeplineşte următoarele condiţii:

a) $L(x+y) = L(x) + L(y)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{C}$;

b) $L(\alpha x) = \overline{\alpha} L(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{C}$ şi pentru orice număr $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; numărul $\overline{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2$ reprezintă aici conjugatul complex al numărului α.

Forma analogică a lui (2.1.1) în cazul unei forme de genul II este

$$L(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) = \overline{\alpha_1} L(x_1) + ... + \overline{\alpha_k} L(x_k), \tag{2.1.2}$$

pentru orice $x_1, x_2, ..., x_k$ din $\mathcal{C}$ şi pentru orice numere complexe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Un exemplu de formă liniară de genul II într-un spaţiu complex de dimensiune n, $\mathcal{C}_n$ cu baza $e_1, ..., e_n$ îl constituie funcţia L definită prin

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k \overline{\xi_k},$$

unde $l_1, ..., l_n$ sunt numere complexe fixate arbitrar, iar $\xi_1, ..., \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x relativ la baza $e_1, ..., e_n$. Arătăm că această formă dă reprezentarea generală a unei forme liniare de genul II pe spaţiul $\mathcal{C}_n$. Fie $L(x)$ o formă liniară oarecare de genul II; punem $l_1 = L(e_1), ..., l_n = L(e_n)$. Atunci pentru orice $x \in \mathcal{C}_n$, aplicând formula (2.1.2), rezultă $L(x) = L\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} L(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} l_k$, ceea ce trebuia arătat.

2.2 Operatori liniari.

O formă liniară $L(x)$ definită într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ este aşa cum am văzut, morfism de la spaţiul $\mathcal{K}$ la spaţiul unidimensional $\mathcal{K}_1$.

Considerăm acum un morfism $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ al unui spaţiu vectorial $\mathcal{X}$ în orice spaţiu vectorial $\mathcal{Y}$ peste acelaşi corp $\mathbf{K}$. Vom scrie uneori pe scurt $\mathcal{A}x$ în loc de $\mathcal{A}(x)$. Conform definiţiei 2.1.1. avem

a) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ pentru orice x, y din$\mathcal{X}$;

b) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{K}$.

Ca şi pentru forme liniare, din condiţiile a),b) rezultă formula mai generală

c) $\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + ... + \alpha_k \mathcal{A}x_k$, pentru orice $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathcal{X}$ şi pentru orice $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbf{K}$.

Morfismul $\mathcal{A}$ se mai numeşte **operator liniar** acţionând de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{Y}$ (care aplică spaţiul $\mathcal{X}$ în spaţiul $\mathcal{Y}$).

Exemplul 2.2.1. Operatorul care asociază fiecărui vector x al spaţiului $\mathcal{X}$ vectorul nul din spaţiul $\mathcal{Y}$ este în mod evident un operator liniar, numit operatorul nul.

Exemplul 2.2.2. Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar acţionând de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{Y}$. Definim $\mathcal{B}x = -\mathcal{A}x$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$. Operatorul $\mathcal{B}$ astfel obţinut este de asemenea un operator liniar, care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$; el se numeşte operatorul opus lui $\mathcal{A}$.

Exemplul 2.2.3. Presupunem că vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$ ai unei baze a spaţiului $\mathcal{X}$ li se asociază arbitrar vectorii $f_1, f_2, ..., f_n$ din spaţiul $\mathcal{Y}$. Atunci există un operator liniar unic $\mathcal{A}$ care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ astfel încât $\mathcal{A}e_k = f_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Într-adevăr, dacă operatorul căutat $\mathcal{A}$ există, atunci pentru orice vector $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathcal{X}$ are loc egalitatea $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{A}e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k f_k$, care demonstrează unicitatea operatorului $\mathcal{A}$. Pe de altă parte, pentru orice $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathcal{X}$ putem pune prin definiţie $\mathcal{A}x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k f_k$. Operatorul $\mathcal{A}$ astfel obţinut este evident un operator liniar care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{A}e_k = f_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, ceea ce trebuia arătat.

Exemplul 2.2.4. Asociind oricărui vector x dintr-un spaţiu $\mathcal{X}$ acelaşi vector x, se obţine un operator liniar ε acţionând de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{X}$. Acest operator se numeşte operatorul identic sau operatorul unitate al spaţiului $\mathcal{X}$.

2.3 Scrierea matricială a operatorilor liniari.

Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar acţionând de la un spaţiu $\mathcal{X}$ de dimensiune n într-un spaţiu $\mathcal{Y}$ de dimensiune m. Fixăm în spaţiul $\mathcal{X}$ o bază $e_1, e_2, ..., e_n$şi în spaţiul $\mathcal{Y}$ o bază $f_1, f_2, ..., f_m$. Vectorul $e_1$este dus prin operatorul $\mathcal{A}$ într-un anumit vector $\mathcal{A}e_1$ din $\mathcal{Y}$, care poate fi exprimat cu ajutorul bazei din $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{A}e_1 = a_1^{(1)} f_1 + a_2^{(1)} f_2 + ... + a_m^{(1)} f_m.$$

În mod analog acţionează operatorul $\mathcal{A}$ pe ceilalţi vectori din baza fixată în $\mathcal{X}$:

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{A}e_2 & = & a_1^{(2)} f_1 + a_2^{(2)} f_2 + ... + a_m^{(2)} f_m, \\ & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}e_n & = & a_1^{(n)} f_1 + a_2^{(n)} f_2 + ... + a_m^{(n)} f_m.\end{array}$$

Aceste formule se pot scrie pe scurt

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i \quad (j = 1, 2, ..., n) . \tag{2.3.1}$$

Coeficienţii $a_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$determină o matrice cu m-linii şi n-coloane sau pe scurt o $m \times n$ matrice

$$A = A_{(\mathbf{B},\mathbf{B'})} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & ... & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & ... & a_2^{(n)} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_m^{(1)} & a_m^{(2)} & ... & a_m^{(n)} \end{pmatrix}$$

care se numeşte matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele **B**= $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi **B'**= $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$. Coloanele acestei matrici sunt coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n$, relativ la baza $f_1, f_2, ..., f_m$.

Fie acum $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ un vector oarecare şi $y = \mathcal{A}x = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i f_i$; explicităm modul în care coordonatele η_i ale vectorului y se exprimă prin coordonatele ξ_j ale vectorului x. Avem $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i f_i = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A}e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j\right) f_i$.

Egalând coeficienţii vectorului f_i, rezultă

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j \quad (i = 1, 2, ..., m) . \tag{2.3.2}$$

Mai explicit

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = a_1^{(1)}\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + ... + a_1^{(n)}\xi_n, \\ \eta_2 = a_2^{(1)}\xi_1 + a_2^{(2)}\xi_2 + ... + a_2^{(n)}\xi_n, \\ .... \\ \eta_m = a_m^{(1)}\xi_1 + a_m^{(2)}\xi_2 + ... + a_m^{(n)}\xi_n. \end{array} \right. \tag{2.3.3}$$

Aşadar, având matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele **B** şi **B',** se poate determina rezultatul aplicării operatorului la orice vector $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ din spaţiul $\mathcal{X}$ şi anume: coordonatele vectorului $y = \mathcal{A}x$ se exprimă liniar prin coordonatele vectorului x după formulele (2.3.3). Notăm faptul că matricea coeficienţilor în formulele (2.3.3) coincide cu matricea $A_{(\mathbf{B},\mathbf{B'})}$.

Fie acum $\left(a_i^{(j)}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ o $m\times n$ matrice oarecare (indicele inferior indică numărul liniei şi cel superior numărul coloanei). Dacă are loc $x=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j$, atunci putem construi vectorul $y=\sum\limits_{i=1}^{m}\eta_i f_i$ după formulele (2.3.3).

Se poate arăta uşor că operatorul $\mathcal{A}$ care asociază vectorului x vectorul y ca mai sus, este un operator liniar. Construim matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele fixate **B** şi **B'**. Vectorul e_1 are coordonatele $\xi_1=1,\xi_2=\xi_3=...=\xi_n=0$; în virtutea formulelor (2.3.3) coordonatele vectorului $\mathcal{A}e_1$ vor fi numerele $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)},...,a_m^{(1)}$ astfel încât

$$\mathcal{A}e_1=a_1^{(1)}f_1+a_2^{(1)}f_2+...+a_m^{(1)}f_m.$$

În mod analog,

$$\mathcal{A}e_j=a_1^{(j)}f_1+a_2^{(j)}f_2+...+a_m^{(j)}f_m\ \ (j=1,2,...,n)\,.$$

Prin urmare, matricea operatorului $\mathcal{A}$ coincide cu matricea considerată iniţial $\left(a_i^{(j)}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$.

Astfel, orice $m\times n$ matrice este matricea unui anumit operator liniar $\mathcal{A}$ acţionând de la un spaţiu n-dimensional $\mathcal{X}$ la un spaţiu m-dimensional $\mathcal{Y}$ cu bazele fixate $e_1,e_2,...,e_n$ în $\mathcal{X}$ şi $f_1,f_2,...,f_m$ în $\mathcal{Y}$.

Am arătat aşadar că între operatorii liniari care acţionează de la spaţiul $\mathcal{X}$ (cu baza fixată $e_1,e_2,...,e_n$) la spaţiul $\mathcal{Y}$ (cu baza fixată $f_1,f_2,...,f_m$) şi $m\times n$ matricile cu coeficienţi din corpul **K** există o corespondenţă biunivocă explicitată prin formulele (2.3.1) sau formulele echivalente (2.3.2).

Se poate observa că operatorul $\mathcal{A}$ poate fi determinat în mod unic, având matricea $A=\left(a_i^{(j)}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$, prin aplicarea directă a formulelor (2.3.3). În aceste formule, coloana j a matricii A este formată din coordonatele vectorului $\mathcal{A}e_j\,(j=1,2,...,n)\,.$

Exemplul 2.3.1. Matricea operatorului nul în orice bază a lui $\mathcal{X}$ şi orice bază a lui $\mathcal{Y}$, are toate elementele egale cu zero.

Exemplul 2.3.2. Dacă $\left(a_i^{(j)}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ este matricea unui operator $\mathcal{A}$, atunci matricea operatorului opus este $\left(-a_i^{(j)}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$.

Exemplul 2.3.3. Presupunem că $m\geq n$ şi că operatorul $\mathcal{A}$ transformă vectorii unei baze $e_1,e_2,...,e_n$ a spaţiului $\mathcal{X}$ în vectorii liniar independenţi $f_1,f_2,...,f_n$ din spaţiul $\mathcal{Y}$. Completăm vectorii $f_1,f_2,...,f_n$ până la o bază a lui $\mathcal{Y}$ cu vectorii $f_{n+1},...,f_m$. Atunci matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele

$e_1, e_2, ..., e_n$ şi $f_1, f_2, ..., f_m$ va avea, în mod evident, forma următoare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

unde în primele n linii şi n coloane regăsim matricea unitate de ordinul n.

Exemplul 2.3.4. În particular, matricea operatorului identic într-o bază $e_1, e_2, ..., e_n$ a unui spaţiu $\mathcal{X}$ (ca domeniu de definiţie) şi în aceeaşi bază în $\mathcal{X}$ (ca domeniu de valori), are forma

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3.3'}$$

Matricea E se numeşte $n \times n$-matricea identitate sau matricea unitate de ordinul n.

2.4 Operaţii asupra operatorilor liniari.

Considerăm aici operaţiile de adunare a operatorilor, de înmulţire a unui operator cu un număr şi de înmulţire (compunere) a operatorilor.

Doi operatori $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ acţionând de la spaţiul $\mathcal{X}$ la spaţiul $\mathcal{Y}$ se consideră egali şi se scrie $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ dacă $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, pentru orice $x \in \mathcal{X}$.

2.4.1. Adunarea operatorilor. Presupunem daţi doi operatori liniari $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ care aplică spaţiul $\mathcal{X}$ în spaţiul $\mathcal{Y}$. Operatorul $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ se defineşte prin formula

$$\mathcal{C}x = (\mathcal{A} + \mathcal{B})\, x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \text{ pentru orice } x \in \mathcal{X}. \tag{2.4.1}$$

Este evident că operatorul $\mathcal{C}$ aplică spaţiul $\mathcal{X}$ în spaţiul $\mathcal{Y}$. Arătăm că el este un operator liniar. Fie $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, atunci $\mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \mathcal{B}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 + \alpha_1 \mathcal{B}x_1 + \alpha_2 \mathcal{B}x_2 = \alpha_1 (\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_1) + \alpha_2 (\mathcal{A}x_2 + \mathcal{B}x_2) = \alpha_1 \mathcal{C}x_1 + \alpha_2 \mathcal{C}x_2$.

Operatorul liniar $\mathcal{C}$ definit prin relaţia (2.4.1) se numeşte suma operatorilor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$.

Se verifică uşor următoarele egalităţi:

$$\begin{cases} \mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}, \\ (\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}), \\ \mathcal{A}+O=O+\mathcal{A}=\mathcal{A}, \\ \mathcal{A}+(-\mathcal{A})=O. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Aici $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ sunt operatori liniari oarecare, O este operatorul nul, $-\mathcal{A}$ este operatorul opus lui $\mathcal{A}$, adică operatorul care asociază oricărui vector $x \in \mathcal{X}$ vectorul$-\mathcal{A}x$.

2.4.2. Înmulţirea unui operator cu un număr. Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar acţionând de la spaţiul $\mathcal{X}$ la spaţiul $\mathcal{Y}$ şi dacă λ este un număr oarecare din corpul $\mathbf{K}$, atunci operatorul $\mathcal{B}=\lambda\mathcal{A}$, numit produsul operatorului $\mathcal{A}$ cu numărul λ se defineşte prin formula $\mathcal{B}x=(\lambda\mathcal{A})\,x=\lambda\,(\mathcal{A}x)$, pentru orice $x \in \mathcal{X}$. Se verifică cu uşurinţă că operatorul $\mathcal{B}$ definit mai sus este un operator liniar. În plus, au loc următoarele relaţii:

$$\begin{cases} \lambda_1(\lambda_2\mathcal{A})=(\lambda_1\lambda_2)\,\mathcal{A}, \\ 1\mathcal{A}=\mathcal{A}, \\ (\lambda_1+\lambda_2)\,\mathcal{A}=\lambda_1\mathcal{A}+\lambda_2\mathcal{A}, \\ \lambda\,(\mathcal{A}+\mathcal{C})=\lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.4.2'}$$

Relaţiile (2.4.2) şi (2.4.2') arată că mulţimea tuturor operatorilor liniari, care acţionează de la un spaţiu vectorial $\mathcal{X}$ la un spaţiu vectorial $\mathcal{Y}$, formează un spaţiu vectorial.

2.4.3. Produsul (compunerea) de operatori. Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar de la spaţiul $\mathcal{X}$ la spaţiul $\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{B}$ este un operator liniar de la spaţiul $\mathcal{Y}$ la spaţiul $\mathcal{Z}$ (toate spaţiile fiind peste acelaşi corp de scalari $\mathbf{K}$), atunci se poate defini operatorul $\mathcal{P}=\mathcal{B}\mathcal{A}$ numit produsul (compunerea) operatorului $\mathcal{B}$ cu operatorul $\mathcal{A}$, ca operator de la spaţiul $\mathcal{X}$ la spaţiul $\mathcal{Z}$, dat prin formula $\mathcal{P}x=(\mathcal{B}\mathcal{A})\,x=\mathcal{B}\,(\mathcal{A}x)$ (adică mai întîi se aplică operatorul $\mathcal{A}$ vectorului x şi apoi asupra rezultatului, ca vector din $\mathcal{Y}$, i se aplică operatorul $\mathcal{B}$). Operatorul astfel construit este de asemenea liniar deoarece: $\mathcal{P}\,(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\mathcal{B}\,[\mathcal{A}\,(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)]=\mathcal{B}\,(\alpha_1\mathcal{A}x_1+\alpha_2\mathcal{A}x_2)=\alpha_1\mathcal{B}\mathcal{A}x_1+\alpha_2\mathcal{B}\mathcal{A}x_2=\alpha_1\mathcal{P}x_1+\alpha_2\mathcal{P}x_2$. Se probează uşor următoarele relaţii:

a) $\lambda\,(\mathcal{B}\mathcal{A})=(\lambda\mathcal{B})\,\mathcal{A}$, pentru orice operatori $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ cu proprietăţile indicate anterior şi pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}$;

b) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\mathcal{C}=\mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C}$, pentru orice operatori $\mathcal{A},\mathcal{B}$ de la spaţiul $\mathcal{Y}$ la spaţiul $\mathcal{Z}$ şi pentru orice $\mathcal{C}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$;

c) $\mathcal{A}\,(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C}$, pentru orice operatori $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ acţionând de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{Y}$ şi pentru orice operator $\mathcal{A}:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$;

d) $(\mathcal{A}\mathcal{B})\,\mathcal{C}=\mathcal{A}\,(\mathcal{B}\mathcal{C})$, pentru orice operator $\mathcal{C}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, $\mathcal{B}:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$, $\mathcal{A}:\mathcal{Z}\to\mathcal{W}$.

Verificăm, de exemplu relaţia d). Conform definiţiei egalităţii a doi operatori, trebuie arătat că pentru orice vector $x \in \mathcal{X}$ avem $[\mathcal{A}(\mathcal{BC})]\,x = [(\mathcal{AB})\,\mathcal{C}]\,x$.

Conform definiţiei compunerii operatorilor, $[\mathcal{A}(\mathcal{BC})]\,x = \mathcal{A}[(\mathcal{BC})\,x] = \mathcal{A}[\mathcal{B}(\mathcal{C}x)]$, iar $[(\mathcal{AB})\,\mathcal{C}]\,x = (\mathcal{AB})(\mathcal{C}x) = \mathcal{A}[\mathcal{B}(\mathcal{C}x)]$, adică se obţine egalitatea cerută. Celelalte egalităţi se demonstrează în mod similar.

2.5 Operaţii corespunzătoare asupra matricilor.

Explicităm modul cum operaţiile asupra operatorilor, descrise în paragraful precedent, se reflectă asupra matricilor acestor operatori.

2.5.1. Adunarea operatorilor. Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ doi operatori definiţi pe spaţiul $\mathcal{X}$ cu valori în spaţiul $\mathcal{Y}$. Fie $e_1, ..., e_n$ o bază a lui $\mathcal{X}$ şi $f_1, ..., f_m$ o bază în $\mathcal{Y}$ şi presupunem că operatorului $\mathcal{A}$ i se asociază în aceste baze matricea $A = \left(a_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$, iar operatorului $\mathcal{B}$ matricea $B = \left(b_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$; aşadar $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i, \mathcal{B}e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i$ $(j = 1, 2, ..., n)$. În acest caz avem că $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\,e_j = \mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(a_i^{(j)} + b_i^{(j)}\right) f_i$, de unde rezultă că operatorul $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ are în corespondenţă matricea $\left(a_i^{(j)} + b_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$. Această matrice se numeşte suma matricilor $\left(a_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ cu $\left(b_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ şi este definită pentru orice două matrici A, B având acelaşi tip (acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane).

2.5.2. Înmulţirea unui operator cu un număr. În aceleaşi condiţii $(\lambda\mathcal{A})\,e_j = \lambda(\mathcal{A}e_j) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i$. Aşadar, operatorului $\lambda\mathcal{A}$ îi corespunde matricea $\left(\lambda a_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$, obţinută prin înmulţirea tuturor elementelor matricii $\left(a_i^{(j)}\right)_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ cu numărul λ.

Deoarece $m \times n$-matricile şi operatorii liniari acţionând de la un spaţiu n-dimensional la un spaţiu m-dimensional se corespund în mod biunivoc, operaţiilor cu operatori le corespund operaţii corespunzătoare, cu aceeaşi denumire şi pentru matrici; rezultă că operaţiile cu matrici satisfac de asemenea regulile (2.4.2) şi (2.4.2'), fapt care se poate uşor arăta şi în mod direct. În acest mod, rezultă că mulţimea tuturor $m \times n$-matricilor formează un spaţiu vectorial. Prin însuşi construcţia lui, acest spaţiu se regăseşte în correspondenţă biunivocă cu spaţiul vectorial al tuturor operatorilor ce acţionează de la spaţiul n-dimensional $\mathcal{X}$ la spaţiul m-dimensional $\mathcal{Y}$.

2.4.3. Înmulţirea operatorilor. Fie spaţiile $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$; în spaţiul $\mathcal{X}$ considerăm o bază $e_1, ..., e_n$, în spaţiul $\mathcal{Y}$ baza $f_1, ..., f_m$ şi în $\mathcal{Z}$ baza $g_1, ..., g_q$. Presupunem că operatorul $\mathcal{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ are $m \times n$-matricea $\left(b_i^{(j)}\right)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$, adică $\mathcal{B}e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i \ (j = 1, 2, ..., n)$, iar operatorul $\mathcal{A} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ are $q \times m$-matricea $\left(a_k^{(i)}\right)_{1 \le k \le q; 1 \le i \le m}$, astfel încât $\mathcal{A}f_i = \sum\limits_{k=1}^{q} a_k^{(i)} g_k \quad (i = 1, 2, ..., m)$. Pentru produsul $\mathcal{P} = \mathcal{AB}$ avem $(\mathcal{AB})\, e_j = \mathcal{A}(\mathcal{B}e_j) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^{(j)} \mathcal{A} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^{(j)} \sum\limits_{k=1}^{q} a_k^{(i)} g_k = \sum\limits_{k=1}^{q} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_k^{(i)} b_i^{(j)}\right) g_k$.

Aşadar, elementele $p_k^{(j)}$ ale matricii P a operatorului $\mathcal{P} = \mathcal{AB}$ au forma

$$p_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} b_i^{(j)} \ \ (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., q). \tag{2.5.1}$$

Am obţinut astfel rezultatul căutat. Acest fapt poate fi exprimat astfel: elementul matricii P situat pe linia k şi coloana j este egal cu suma produselor tuturor elementelor liniei k a matricii A cu elementele corespunzătoare ale coloanei j din matricea B.

Matricea $P = \left(p_k^{(j)}\right)_{1 \le k \le q; 1 \le j \le n}$ obţinută din matricile $\left(a_k^{(i)}\right)_{1 \le k \le q; 1 \le i \le m}$ şi $\left(b_i^{(j)}\right)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$ prin formula (2.5.1) se numeşte produsul primei matrici prin cea de a doua.

Trebuie observat că numărul coloanelor primei matrici este în mod necesar egal cu numărul liniilor celei de a doua (altfel produsul nu are sens). În acest caz, matricea produs are atâtea linii câte linii are prima matrice şi atâtea coloane câte are a doua matrice.

Indicăm o scriere mai sugestivă: produsul unei $q \times l$-matrici A cu o $m \times n$-matrice B este definit dacă $l = m$ şi în acest caz produsul AB este o $q \times n$-matrice. Ambele produse AB şi BA sunt definite dacă $l = m$, $q = n$; în acest caz AB este o $n \times n$-matrice pătratică, iar BA este o $m \times m$-matrice pătratică. Dacă $n = m = p = q$, adică A şi B sunt ambele matrici pătratice de ordinul n, atunci AB şi BA sunt de asemenea matrici pătratice de ordinul n. Totuşi produsele pot să nu fie egale. În general, înmulţirea matricilor pătratice nu este comutativă. În ceea ce priveşte regulile de asociativitate şi distributivitate, situaţia este mai bună: înmulţirea operatorilor satisface regulile de asociativitate şi distributivitate aşa cum am văzut în cazul operaţiilor cu operatori liniari; deoarece matricile şi operatorii sunt în corespondenţă biunivocă şi produsului matricilor îi corespunde produsul operatorilor, rezultă că produsul de matrici este asociativ şi distributiv în raport cu adunarea lor.

În exemplele care urmează, indicii elementelor matricilor se scriu jos, astfel încât elementul a_{jk} al matricii $A = (a_{jk})$se află la intersecţia liniei j cu coloana k. Formula $P = AB$ se scrie cu aceste notaţii sub forma $p_{kj} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij}\ (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., q)$.

Exemplul 2.5.1. Înmulţim o $m \times n$-matrice $A = (a_{jk})_{1 \le j \le m; 1 \le k \le n}$ la stânga cu $m \times m$-matricea $B = (b_{jk})_{1 \le j,k \le m}$, în care toate elementele b_{jk} sunt egale cu 0, în afara unui singur element b_{rs}, egal cu 1. Conform regulii generale (2.5.1) se obţine $m \times n$-matricea

$$B_{rs}A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \end{array} \\ (r) & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{s1} & a_{s2} & ... & a_{sn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{cc} (r) & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ a_{s1} & ... & a_{sn} \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

astfel încât pe linia r a matricii $B_{rs}A$ se află elementele liniei s a matricii A, iar celelalte elemente ale matricii $B_{rs}A$ sunt egale cu 0.

Exemplul 2.5.2. Înmulţim $m \times n$-matricea $A = (a_{jk})_{1 \le j \le m; 1 \le k \le n}$ la dreapta cu $n \times n$-matricea $C_{qt} = (c_{jk})_{1 \le j \le n; 1 \le k \le n}$ în care toate elementele c_{jk} sunt egale cu 0 în afara singurului element c_{qt}, egal cu 1. Conform regulii generale (2.5.1) se obţine $m \times n$-matricea

$$AC_{qt} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1q} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2q} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mq} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} (q) & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ... & a_{1q} & ... & 0 \\ 0 & ... & a_{2q} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{mq} & ... & 0 \end{pmatrix}$$

astfel încât în coloana t a matricii AC_{qt} se află elementele coloanei q a matricii A şi toate celelalte elemente ale matricii AC_{qt} sunt egale cu zero.

Exemplul 2.5.3. Cu notaţiile anterioare avem

$$B_{rs}AC_{qt} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & (t) & & \end{array} \\ (r) & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{sq} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

astfel încât prin operaţia $B_{rs}AC_{qt}$ aplicată unei $m \times n$-matrici, se obţine o $m \times n$-matrice a cărei elemente sunt toate nule, cu excepţia elementului aflat pe linia r şi coloana t, care este egal cu a_{sq}.

Exemplul 2.5.4. Cu ce $m \times n$-matrice D trebuie să înmulţim la stânga o $m \times n$-matrice A astfel încât matricea DA să coincidă cu matricea obţinută din A prin permutarea liniilor r şi s ?

Exemplul de la 2.5.1. arată cum se obţine matricea în care linia r este tocmai linia s a matricii A, prin înmulţire la stânga cu $m \times m$-matricea B_{rs}. Dar celelalte linii sunt egale cu 0. Aşadar, pentru a obţine matricea căutată, trebuie înmulţită matricea A la stânga cu $m \times m$-matricea

$$D = B_{rs} + B_{sr} + \sum_{k \neq q; k \neq t} B_{jj}.$$

Exemplul 2.5.5. Cu ce $n \times n$-matrice G trebuie înmulţită la dreapta $m \times n$-matricea A astfel încât AG să coincidă cu matricea obţinută din A prin permutarea coloanelor q şi t ?

Raţionând în mod similar se obţine

$$G = C_{qt} + C_{tq} + \sum_{k \neq q; k \neq t} C_{kk}.$$

Exemplul 2.5.6. Cu ce $m \times m$-matrice F trebuie să înmulţim la stânga o $m \times n$-matrice A astfel încât matricea care se obţine să coincidă cu matricea obţinută din A în care linia r este adunată la linia s înmulţită cu coeficientul λ ?

Conform celor spuse la exemplul 2.5.1. răspunsul este imediat: $F = E + \lambda B_{rs}$ (E fiind matricea unitate).

Exemplul 2.5.7. Cu ce $n \times n$-matrice H trebuie înmulţită la dreapta o $m \times n$-matrice A astfel încât matricea care se obţine să coincidă cu matricea obţinută din A în care la coloana t este adăugată coloana q înmulţită cu coeficientul μ ?

Răspunsul este $H = E + \mu C_{qt}$.

2.6 Alte proprietăţi legate de înmulţirea matricilor.

Înmulţirea matricilor descompuse în blocuri. În anumite situaţii, este comodă descompunerea matricilor factori în blocuri şi efectuarea înmulţirii pe blocuri.

Presupunem că sunt fixate o $m \times n$-matrice A şi o $n \times p$-matrice B, care sunt descompuse în blocuri astfel:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... \\ A_{21} & A_{22} & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & ... \\ B_{21} & B_{22} & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Presupunem că în fiecare linie bloc a matricii A sunt tot atâtea blocuri câte sunt în fiecare coloană bloc a matricii B, deci lăţimea oricărui bloc A_{jk} al matricii A coincide cu înălţimea oricărui bloc B_{ks} al matricii B. Atunci toate produsele $A_{jk}B_{ks}$ au sens şi sunt matrici dreptunghiulare ale căror dimensiuni depind de indicii j şi s, dar nu depind de indicele k.

Regula de înmulţire a matricilor A şi B ca mai sus este următoarea: matricea AB se alcătuieşte din blocuri construite din blocurile matricilor A şi B tot astfel cum elementele matricii AB se alcătuiesc din elementele matricilor A şi B :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21+...} & A_{11}B_{12} + ... & ... \\ A_{21}B_{11} + ... & A_{21}B_{12} + ... & ... \\ .... & .... & ... \\ .... & .... & ... \end{pmatrix}. \quad (2.6.1)$$

Într-adevăr, fie i numărul liniei bloc a matricii A care conţine însăşi linia k a matricii A şi fie j numărul coloanei bloc a matricii B care conţine însăşi coloana q a matricii B. Conform regulii generale (2.5.1) elementele matricii $P = AB$ au forma: $p_{kq} = a_{k1}b_{1q} + ... + a_{kn}b_{nq} = (a_{k1}b_{1q} + ... + a_{kp}b_{pq}) + ... + (a_{kr}b_{rq} + ... + a_{kn}b_{nq})$, unde parantezele sunt compuse în corespondenţă cu lăţimea blocurilor matricii A (şi cu înălţimea blocurilor matricii B). Vom numerota liniile şi coloanele blocurilor cu aceleaşi numere ca în însăşi matricea A. În prima paranteză se află elementul de la intersecţia liniei k cu coloana q din blocul $A_{i1}B_{1j}$, în a doua, elementul situat la intersecţia liniei k cu coloana j a blocului $A_{i2}B_{2j}$ etc.; în final se obţine elementul care este situat la intersecţia liniei k cu coloana q ale blocului $A_{i1}B_{1j} + ... + A_{ir}B_{rj}$, ceea ce trebuia arătat.

Înmulţirea matricilor cvasidiagonale.

Definiţia 2.6.1. O matrice se numeşte cvasidiagonală (sau bloc diagonal) dacă ea are forma

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & O & ... & O \\ O & A_{22} & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & A_{ss} \end{pmatrix},$$

unde blocurile notate cu O sunt formate numai din elemente egale cu zero. Presupunem că blocul A_{kk} este o $m_k \times n_k$-matrice $(k=1,2,...,s)$. Considerăm matricea cvasidiagonală

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & O & ... & O \\ O & B_{22} & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & B_{ss} \end{pmatrix},$$

unde blocul B_{kk}este o $n_k \times p_k$-matrice $(k=1,2,...,s)$. Matricile A şi B pot fi înmulţite conform regulii (2.6.1) obţinându-se drept rezultat:

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O & ... & O \\ O & A_{22}B_{22} & ... & O \\ ... & ... & ... & ... \\ O & O & ... & A_{ss}B_{ss} \end{pmatrix}. \tag{2.6.2}$$

Astfel, în cazul considerat, matricea AB este tot o matrice cvasidiagonală în care blocul $A_{kk}B_{kk}$ are m_k linii şi p_k coloane.

Produsul a două matrici transpuse.

Definiţie 2.6.2. Se numeşte transpusă a matricii A, $n \times m$-matricea $A^t = \left(a'_{pq}\right)_{1\le p\le n; 1\le q\le m}$ pentru care

$$a'_{pq} = a_{qp} \quad (p=1,2,...,n; q=1,2,...,m).$$

Fie A o $m \times n$-matrice şi B o $n \times p$-matrice. Aşadar, produsul $P=AB$ este bine definit şi este o $m \times p$-matrice. Pe de altă parte, este definit şi produsul matricilor transpuse B^tA^t care este o $p \times m$-matrice. Vom arăta că are loc formula:

$$B^tA^t = (AB)^t. \tag{2.6.3}$$

Pentru demonstraţie, notăm elementele matricilor $A, B, P=AB, A^t, B^t, P^t$ respectiv prin $a_{ij}, b_{ij}, p_{ij}, a'_{ij}=a_{ji}, b'_{ij}=b_{ji}, p'_{ij}=p_{ji}$. Egalitatea (2.6.3), care defineşte elementele p_{ik} poate fi scrisă sub forma

$$p_{ik} = p'_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}a'_{ji}.$$

Însumarea se face după indicele j pentru indicii i, k fixaţi. Indicii fixaţi arată că pentru a forma elementul p'_{ki}, în matricea B^t se foloseşte ca linia k, iar în matricea A^t se foloseşte linia i. Ca rezultat al sumei produselor elementelor corespunzătoare se obţine elementul p'_{ki} aflat la intersecţia liniei k cu coloana i a matricii P^t. Dar prin definiţia produsului de matrici, aceasta înseamnă că matricea P^t este produsul matricii B^t cu matricea A^t şi egalitatea (2.6.3) este astfel stabilită.

Minorii produsului a două matrici. Considerăm $m \times n$-matricea $A = (a_{jk})$ şi $n \times p$-matricea $B = (b_{jk})$; construim $m \times p$-matricea $P = AB = (p_{jk})$. Fixăm în matricea P liniile cu numerele $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_k$ şi coloanele cu numerele $\beta_1 \leq ... \leq \beta_k$ $(k \leq m, k \leq p)$ şi ne propunem să calculăm minorul $M = M^{\alpha_1,...,\alpha_k}_{\beta_1,...,\beta_k}(AB)$, construit pe liniile şi coloanele fixate

$$M = M^{\alpha_1,...,\alpha_k}_{\beta_1,...,\beta_k}(AB) = \\ = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_1 n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_1 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_1 n}b_{n\beta_k} \\ a_{\alpha_2 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_2 n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_2 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_2 n}b_{n\beta_k} \\ .... & ... & .... \\ a_{\alpha_k 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_k n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_k 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_k n}b_{n\beta_k} \end{vmatrix} \tag{2.6.4}$$

Pentru calcule se foloseşte proprietatea liniară a determinanţilor. Coloana minorului M cu numărul ν este suma a k coloane "elementare" cu elementele de forma $a_{\alpha_j i}b_{i\beta_\nu}$ (unde indicii de coloană i şi ν sunt fixaţi, iar indicele de linie j variază de la 1 la k). De aceea, întreg minorul M este egal cu suma a k^k determinanţi "elementari", constând numai din coloane "elementare". În fiecare din coloanele elementare, factorul $b_{j\beta_\nu}$ nu se modifică în lungul acelei coloane şi el poate fi scos ca factor. După această operaţie, fiecare din determinanţii "elementari" au următoarea formă:

$$b_{i_1\beta_1}b_{i_2\beta_2}...b_{i_k\beta_k} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & a_{\alpha_1 i_2} & ... & a_{\alpha_1 i_k} \\ a_{\alpha_2 i_1} & a_{\alpha_2 i_2} & ... & a_{\alpha_2 i_k} \\ .... & ...... & ... & .... \\ a_{\alpha_k i_1} & a_{\alpha_k i_2} & ... & a_{\alpha_k i_k} \end{vmatrix}, \tag{2.6.5}$$

unde $i_1, i_2, ..., i_k$ sunt numere cuprinse între 1 şi n. Dacă printre aceste numere unele coincid, atunci determinantul elementar corespunzător este egal cu 0. Aşa se va întâmpla dacă $n < k$. De aceea, dacă în matricea AB există minori de ordin $k > n$, atunci toţi aceşti minori sunt nuli.

Revenind la cazul $k \leq n$, se observă că trebuie consideraţi acei determinanţi elementari pentru care toţi indicii $i_1, i_2, ..., i_k$ sunt distincţi. În acest caz, determinantul

$$M = M_{i_1,\ldots,i_n}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & a_{\alpha_1 i_2} & \cdots & a_{\alpha_1 i_k} \\ a_{\alpha_2 i_1} & a_{\alpha_2 i_2} & \cdots & a_{\alpha_2 i_k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{\alpha_k i_1} & a_{\alpha_k i_2} & \cdots & a_{\alpha_k i_k} \end{vmatrix}$$

coincide până la semn cu minorul $M_{j_1,\ldots,j_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$,unde $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$ sunt indicii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ordonaţi în ordinea crescătoare. Precizăm acum ce semn trebuie luat în faţa minorului $M_{i_1,\ldots,i_n}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, pentru a obţine în final dispunerea normală (care coincide cu cea a coloanelor în însăşi matricea A). Pentru fiecare permutare a două coloane vecine, minorul $M_{i_1,\ldots,i_n}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ îşi schimbă semnul; pe de altă parte, numărul de inversiuni în permutarea indicilor $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se modifică cu o unitate. Deoarece în dispunerea finală a coloanelor, indicii inferiori se află în ordinea naturală, fără inversiuni, atunci numărul schimbărilor succesive de semn este egal cu numărul inversiunilor din permutarea indicilor $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (se presupune că în fiecare permutare a indicilor, indicele mai mic se află înaintea celui mai mare şi prin aceasta numărul inversiunilor se micşorează exact cu o unitate). Notăm acest număr prin $N(i)$. Atunci expresia (2.6.5) capătă forma următoare

$$(-1)^{N(i)} b_{i_1\beta_1} b_{i_2\beta_2} \ldots b_{i_k\beta_k} M_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(A). \tag{2.6.6}$$

Pentru a obţine mărimea lui M trebuie adunate toate expresiile de forma (2.6.6). Adunăm mai întâi expresiile având indicii $i_1 < \ldots < i_k$. Factorul comun $M_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(A)$ poate fi separat şi în paranteză se va afla mărimea $\sum(-1)^{N(i)} b_{i_1\beta_1} b_{i_2\beta_2} \ldots b_{i_k\beta_k}$, care în mod evident este minorul $M_{\beta_1,\ldots,\beta_k}^{i_1,\ldots,i_k}(B)$. În final se obţine formula

$$M_{\beta_1,\ldots,\beta_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(AB) = \sum M_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(A)\, M_{\beta_1,\ldots,\beta_k}^{i_1,\ldots,i_k}(B). \tag{2.6.7}$$

Însumarea se face aici după toate sistemele de indici $i_1 < \ldots < i_k$, care sunt numere variind între 1 şi n. Numărul total al termenilor din această sumă este egal cu $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Formăm rezultatul obţinut sub forma următoarei teoreme.

Teorema 2.6.1. *Fiecare minor de ordin k al matricii AB poate fi exprimat cu ajutorul minorilor de acelaşi ordin din matricile A şi B, după formula (2.6.7).*

2.7 Domeniul de valori şi spaţiul nul.

Presupunem că $\mathcal{A}$ este un operator liniar acţionând de la un spaţiu vectorial $\mathcal{X}$ la un spaţiu vectorial $\mathcal{Y}$, $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Fie n dimensiunea spaţiului $\mathcal{X}$ şi m dimensiunea spaţiului $\mathcal{Y}$; alegem o bază oarecare $e_1, e_2, ..., e_n$ în $\mathcal{X}$ şi $f_1, f_2, ..., f_m$ în $\mathcal{Y}$. Atunci operatorului $\mathcal{A}$ i se asociază o $m \times n$-matrice $A = \left(a_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$. Notăm cu $T(\mathcal{A})$ domeniul valorilor operatorului $\mathcal{A}$, adică mulţimea tuturor vectorilor $y = \mathcal{A}x, x \in \mathcal{X}$ (uneori $T(\mathcal{A})$ se mai notează $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ şi este numit imaginea operatorului $\mathcal{A}$). Ne punem problema de a calcula dimensiunea subspaţiului $T(\mathcal{A})$ al lui $\mathcal{Y}$. Punând $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ se obţine $y = \mathcal{A}x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{A}e_k$. Aşadar, domeniul valorilor operatorului $\mathcal{A}$ coincide cu acoperirea liniară a vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n$. Dimensiunea acoperirii liniare $\mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n)$ este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n$. Ştim că în coloanele matricii operatorului $\mathcal{A}$ sunt scrise coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_i$ relativ la baza $f_1, f_2, ..., f_m$;astfel, problema numărului maxim de vectori liniar independenţi în sistemul $\mathcal{A}e_j\ (j = 1, 2, ..., n)$ se reduce direct la cea a numărului maxim de coloane liniar independente ale matricii operatorului $\mathcal{A}$. Aşadar, dimensiunea domeniului de valori al unui operator $\mathcal{A}$ acţionând de la un spaţiu n-dimensional $\mathcal{X}$ la un spaţiu m-dimensional $\mathcal{Y}$, este egală cu rangul matricii operatorului liniar $\mathcal{A}$ în orice bază $e_1, e_2, ..., e_n$ a spaţiului $\mathcal{X}$ şi orice bază $f_1, f_2, ..., f_m$ a lui $\mathcal{Y}$.

Se poate observa că alegerea bazelor din spaţiile $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ nu influenţează rezultatul (căci subspaţiul $T(\mathcal{A})$ depinde numai de $\mathcal{A}$), deci rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$ nu depinde de alegerea bazelor, ci numai de operatorul $\mathcal{A}$ însuşi. În cele ce urmează vom numi rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$ (în orice bază) rang al operatorului $\mathcal{A}$ însuşi şi îl vom nota $r_{\mathcal{A}}$.

Notăm cu $N(\mathcal{A})$ subspaţiul nul al operatorului $\mathcal{A}$ (numit şi nucleul lui $\mathcal{A}$ şi care se mai notează cu $\ker\mathcal{A}$), adică mulţimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{X}$ pentru care $\mathcal{A}x = 0$. Ne punem problema să calculăm dimensiunea subspaţiului $N(\mathcal{A})$, utilizând matricea $A = \left(a_i^{(j)}\right)_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$ al operatorului (într-o pereche de baze, ca mai înainte).

Fie $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in N(\mathcal{A})$. Atunci sistemul (2.3.3) de la scrierea matricială a operatorilor liniari, capătă forma

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^{(1)}\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + ... + a_1^{(n)}\xi_n = 0, \\ a_2^{(1)}\xi_1 + a_2^{(2)}\xi_2 + ... + a_2^{(n)}\xi_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m^{(1)}\xi_1 + a_m^{(2)}\xi_2 + ... + a_m^{(n)}\xi_n = 0. \end{array}\right. \tag{2.7.1}$$

Este evident că şi invers, orice vector $x \in \mathcal{X}$ ale cărui coordonate satisfac sistemul (2.7.1) aparţine subspaţiului nul al operatorului $\mathcal{A}$. Astfel, problema dimensiunii lui $N(\mathcal{A})$ este echivalentă cu cea a dimensiunii subspaţiului de soluţii ale sistemului (2.7.1).Dimensiunea $n_{\mathcal{A}}$ a acestui subspaţiu este egală cu numărul $n-r$, unde r este rangul matricii coeficienţilor sistemului, sau ceea ce este acelaşi lucru, rangul operatorului $\mathcal{A}$; astfel, $n_{\mathcal{A}} = n - r_{\mathcal{A}}$.

În acest mod, am arătat că dimensiunea subspaţiului nul al unui operator $\mathcal{A}$ este egală cu diferenţa între dimensiunea spaţiului $\mathcal{X}$ (pe care este definit operatorul $\mathcal{A}$) şi rangul operatorului $\mathcal{A}$, adică

$$\dim N(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{X} - \dim T(\mathcal{A}).$$

În particular, dacă morfismul $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ este un epimorfism, atunci $T(\mathcal{A}) = \mathcal{Y}$ şi $r_{\mathcal{A}} = m$. Dacă morfismul $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ este monomorfism, atunci $N(\mathcal{A}) = 0$ şi în acest caz, $r_{\mathcal{A}} = n$. Sunt adevărate şi afirmaţiile inverse. Anume, dacă rangul matricii A este egal cu numărul m al liniilor sale, atunci dimensiunea $T(\mathcal{A})$ coincide cu dimensiunea lui $\mathcal{Y}$ şi cum $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{Y}$, rezultă că $T(\mathcal{A}) = \mathcal{Y}$. Aşadar, *morfismul $\mathcal{A}$ este epimorfism dacă şi numai dacă $r_{\mathcal{A}} = m$.* Dacă rangul matricii A este egal cu numărul n al coloanelor ei, atunci vectorii $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n$ sunt liniar independenţi şi deci operatorul $\mathcal{A}$ este monomorfism. De aceea, *morfismul $\mathcal{A}$ este monomorfism dacă şi numai dacă $r_{\mathcal{A}} = n$.*

Are loc următoarea proprietate reciprocă.

Teorema 2.7.1. *Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu n-dimensional şi $\mathcal{Y}$ un spaţiu oarecare. Oricare ar fi subspaţiile $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ şi $\mathcal{T} \subset Y$ având suma dimensiunilor egală cu n, există un operator liniar $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ astfel încât $N(\mathcal{A}) = \mathcal{R}, T(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$.*

Demonstraţie. Notăm dimensiunile lui $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{T}$ respectiv prin k şi $m = n-k$. În subspaţiul $\mathcal{T}$ alegem m vectori liniar independenţi $f_1, f_2, ..., f_m$. Alegem de asemenea o bază oarecare $e_1, e_2, ..., e_n$ în spaţiul $\mathcal{X}$ astfel încât primii k vectori ai bazei să fie situaţi în subspaţiul $\mathcal{R}$.

Definim operatorul $\mathcal{A}$ prin condiţiile

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_i = 0 \ \ (i = 1, 2, ..., k) \\ \mathcal{A}e_{k+j} = f_j \ \ (j = 1, 2, ..., m). \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Arătăm că operatorul $\mathcal{A}$ satisface condiţiile cerute în enunţ.

Mai întâi, este uşor de observat că $T(\mathcal{A})$ este acoperirea liniară a vectorilor $f_j \, (j = 1, 2, ..., m)$ şi coincide deci cu subspaţiul $\mathcal{T}$. Apoi, orice vector al subspaţiului $\mathcal{R}$ aparţine evident lui $N(\mathcal{A})$. Rămâne să arătăm că orice vector din $N(\mathcal{A})$ aparţine lui $\mathcal{R}$.

Admitem pentru aceasta că pentru $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ am avea $\mathcal{A}x = 0$. Folosind condiţiile (2.7.2) rezultă

$$0 = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = \xi_{k+1} f_1 + ... + \xi_n f_m.$$

Deoarece vectorii $f_1, f_2, ..., f_m$ sunt liniar independenţi, rezultă atunci că $\xi_{k+1} = ... = \xi_n = 0$. Dar atunci $x = \xi_1 e_1 + ... + \xi_k e_k$, deci $x \in \mathcal{R}$, ceea ce trebuia dovedit. ■

Are loc următoarea proprietate.

Teorema 2.7.2. *Rangul produsului AB a două matrici A şi B nu depăşeşte rangul fiecăruia dintre factori.*

Demonstraţie. Se subînţelege că am presupus că numărul coloanelor matricii A coincide cu numărul liniilor matricii B (altfel nu ar avea sens produsul AB). Presupunem că A este o $m \times n$-matrice, iar B este o $n \times p$-matrice. Fie spaţiile vectoriale $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ de dimensiune respectiv n, m, p. În spaţiul $\mathcal{X}$ considerăm o bază $e_1, e_2, ..., e_n$, în spaţiul $\mathcal{Y}$ baza $f_1, f_2, ..., f_m$ şi în $\mathcal{Z}$ baza $g_1, g_2, ..., g_p$. În aceste condiţii, matricea A poate fi pusă în corespondenţă cu un operator liniar $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, iar matricea B cu un operator liniar $\mathcal{B} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$. Produsului AB al matricilor A, B îi corespunde operatorul liniar $\mathcal{AB} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$. Domeniul de valori al operatorului $\mathcal{AB}$ este conform însăşi definiţiei lui, conţinut în domeniul de valori al operatorului $\mathcal{A}$. Deoarece dimensiunea domeniului de valori al unui operator este egal cu rangul matricii corespunzătoare, rezultă că rangul produsului a două matrici nu depăşeşte rangul primului factor. Pentru a demonstra că el nu depăşeşte nici rangul celui de al doilea factor, aplicăm operaţia de transpunere; obţinem

$$rang\,(AB) = rang\,(AB)^t = rangB^tA^t \leq rangB^t = rangB,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Rangul produsului a două matrici poate fi mai mic decât rangul fiecăruia dintre factori. De exemplu, matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ au rangul egal cu 1, iar produsul lor $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ are rangul zero. Următoarea teoremă prezintă interes, deoarece ea dă o evaluare a rangului produsului a două matrici în sens opus (minorate şi nu majorate).

Teorema 2.7.3. *Fie A o $m \times n$-matrice de rang r_A şi B o $n \times p$-matrice de rang r_B. Atunci rangul $m \times p$-matricii AB este cel puţin egal cu $r_A + r_B - n$, adică $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.*

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că orice operator $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de rang r transformă orice subspaţiu k-dimensional $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ într-un subspaţiu $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ a cărui dimensiune nu este mai mică decât $r - (n - k)$. Alegem o bază $e_1, e_2, ..., e_n$ în $\mathcal{X}$ astfel încât primii k vectori ai bazei să fie situaţi în subspaţiul $\mathcal{X}'$. Coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_k$ care generează subspaţiul $\mathcal{Y}'$ ocupă în matricea A primele k coloane. Conform ipotezei, în matricea A există r coloane liniar independente. Împărţim aceste coloane în două grupe: în prima grupă considerăm coloanele care au numere de ordine de la 1 la k, iar în cea de a doua, coloanele care au numerele de ordine de la $k+1$ la n. Coloanele din grupa secundă sunt cel mult $n-k$; aşadar prima grupă cuprinde cel puţin $r-(n-k)$ coloane. Astfel, subspaţiul $\mathcal{Y}'$ are cel puţin $r-(n-k)$ vectori liniari independenţi, ceea ce s-a afirmat. Fie acum $\mathcal{A}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{B}:\mathcal{Z}\to\mathcal{X}$ operatori liniari corespunzând matricilor considerate. Evaluarea rangului matricii operatorului $\mathcal{AB}$ conform "domeniului de valori şi subspaţiul nul (nucleul) al unui operator liniar" este de fapt o evaluare a dimensiunii domeniului de valori al acestui operator. Operatorul $\mathcal{B}$ transformă întreg spaţiul $\mathcal{Z}$ în subspaţiul $T(\mathcal{B})\subset\mathcal{X}$ având dimensiunea $r_{\mathcal{B}}$. Conform celor arătate anterior, operatorul $\mathcal{A}$ transformă subspaţiul $T(\mathcal{B})$ într-un subspaţiu a cărui dimensiune nu este mai mică decât $r_{\mathcal{A}}-(n-r_{\mathcal{B}})=r_{\mathcal{A}}+r_{\mathcal{B}}-n$. Aşadar, dimensiunea domeniului de valori al operatorului $\mathcal{AB}$ şi în acelaşi timp rangul matricii AB are mărimea nu mai mică decât $r_{\mathcal{A}}+r_{\mathcal{B}}-n$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Corolar 2.7.1. *Dacă una din matricile A şi B, unde A este o $m\times n$-matrice, iar B este o $n\times p$-matrice, are rangul n, atunci rangul produsului este egal cu rangul celeilalte matrici.*

Demonstraţie. Conform teoremei 2.7.2. are loc

$$rang\,(AB)\le rang\,(A)\quad (=r_A)$$

şi

$$rang\,(AB)\le rang\,(B)\quad (=r_B)\,.$$

Conform teoremei 2.7.3. este adevărată inegalitatea

$$rang\,(AB)\ge r_A+r_B-n.$$

Considerăm că $rang\,(B)=n\quad(=r_B)$. Din ultima inegalitate rezultă că $rang\,(AB)\ge r_A$, dar la începutul demonstraţiei am arătat că $rang\,(AB)\le r_A$, deci $rang\,(AB)=r_A$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Fie $\mathcal{A}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ un operator liniar între spaţiile vectoriale $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$. Un operator liniar $\mathcal{B}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ care transformă $\mathcal{Y}$ în $\mathcal{X}$ se numeşte invers la stânga al lui $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{BA}=\mathcal{E}$, adică $\mathcal{BA}$ coincide cu operatorul identic al spaţiului $\mathcal{X}$. În acest caz se mai spune că operatorul $\mathcal{A}$ este invers la dreapta al lui $\mathcal{B}$. În ce caz operatorul $\mathcal{A}$ are invers la stânga ($\mathcal{B}$ are invers la dreapta) ? Teorema care urmează dă un răspuns acestei întrebări.

Teorema 2.7.4. *Operatorul $\mathcal{A}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ are invers la stânga dacă şi numai dacă $\mathcal{A}$ este monomorfism. Operatorul $\mathcal{B}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ are invers la dreapta dacă şi numai dacă $\mathcal{B}$ este epimorfism.*

Demonstraţie. Presupunem că $\mathcal{A}$ este monomorfism şi că $T(\mathcal{A})\subset\mathcal{Y}$, este domeniul său de valori. Pentru orice element $y\in T(\mathcal{A})$ există $x\in$

$\mathcal{X}$ astfel încât $\mathcal{A}x = y$, iar acest x este unic determinat (deoarece $\mathcal{A}$ este monomorfism). Fie $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Y}$ un subspaţiu a cărui sumă directă cu $T(\mathcal{A})$ este egală cu întreg spaţiul $\mathcal{Y}$. Definim operatorul $\mathcal{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ după regula următoare: pentru $y \in T(\mathcal{A})$, elementul $\mathcal{B}y$ este egal cu acel unic x astfel încât $\mathcal{A}x = y$; pentru $y \in \mathcal{Q}$ punem $\mathcal{B}y = 0$; pentru $y = y_1 + y_2$, unde $y_1 \in T(\mathcal{A})$, $y_2 \in \mathcal{Q}$ punem $\mathcal{B}y = \mathcal{B}y_1$. După cum se verifică imediat, operatorul $\mathcal{B}$ este liniar şi pentru orice $x \in \mathcal{X}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x = x$, deci $\mathcal{B}$ este invers la stânga pentru $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ nu este monomorfism, atunci există un vector $x \in \mathcal{X}$, diferit de zero, astfel încât $\mathcal{A}x = 0$. Atunci pentru orice $\mathcal{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ avem $(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \mathcal{B}(0) = 0$, deci nu există invers la stânga pentru operatorul $\mathcal{A}$.

Presupunem că $\mathcal{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ este un epimorfism şi că $N(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y}$ este nucleul (spaţiul nul) al operatorului $\mathcal{B}$, iar $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Y}$ este un spaţiu a cărui sumă directă cu $N(\mathcal{B})$ este egală cu întreg spaţiul $\mathcal{Y}$. Deoarece $\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}(N(\mathcal{B}) + \mathcal{Q}) = \mathcal{B}(\mathcal{Q})$, atunci aplicaţia $\mathcal{B} : \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ este de asemenea epimorfism şi chiar izomorfism, deoarece nici un element $y \in \mathcal{Q}$ diferit de zero nu este aplicat în zero prin operatorul $\mathcal{B}$. Definim operatorul $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ prin următoarea regulă: pentru orice $x \in \mathcal{X}$ vectorul $\mathcal{A}x$ este acel vector unic $y \in \mathcal{Q}$ pentru care $\mathcal{B}y = x$. Operatorul $\mathcal{A}$ este liniar şi pentru orice $x \in \mathcal{X}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x = x$, deoarece $\mathcal{A}$ este inversul la dreapta pentru $\mathcal{B}$. Dacă $\mathcal{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ nu este epimorfism, atunci pentru vectorul $x \in \mathcal{X}$ care nu aparţine lui $T(\mathcal{B})$ şi pentru orice operator $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x \neq x$, astfel încât $\mathcal{B}$ nu admite invers la dreapta. Teorema este astfel complet demonstrată. ■

Ştim că rezultatul înmulţirii unei $n \times m$-matrici P cu o $m \times n$-matrice A este o matrice pătratică de ordin n , $S = PA$.

Dacă S este matricea unitate de ordin n, atunci P se numeşte inversă la stânga pentru matricea A. În mod analog, înmulţind o $m \times n$-matrice A cu o $n \times m$-matrice Q se obţine o matrice pătratică de ordin m , $T = AQ$ şi dacă T este matricea unitate de ordin m, atunci Q se numeşte inversă la dreapta pentru matricea A.

Folosind rezultatele anterioare se poate reformula teorema 2.7.4. în termeni de rang ai matricilor.

Teorema 2.7.5. *O $m \times n$-matrice A are inversă la stânga dacă şi numai dacă rangul ei este egal cu n; matricea A are inversă la dreapta dacă şi numai dacă rangul ei este egal cu m.*

2.8 Proprietăţi ale spaţiilor izomorfe.

Teorema 2.8.1. *Orice două spaţii n-dimensionale $\mathcal{K}'$ şi $\mathcal{K}''$ (peste corpul* **K***) sunt* **K***-izomorfe.*

Demonstraţie. Fie $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ o bază a spaţiului $\mathcal{K}'$ şi $e''_1, e''_2, ..., e''_n$ o bază a spaţiului $\mathcal{K}''$. Cu ajutorul acestor sisteme de vectori se poate construi morfismul aşa după cum a fost prezentat în cadrul "morfismelor de spaţii vectoriale, proprietatea 2.1.1.". Conform aceleiaşi trimiteri, dar proprietatea 2.1.4. acest morfism este un izomorfism, ceea ce trebuia arătat. ■

Corolar 2.8.1. *Orice spaţiu vectorial n-dimensional peste un corp* $\mathbf{K}$ *este* $\mathbf{K}$*-izomorf cu spaţiul* $\mathbf{K}_n$ *(definit la spaţii vectoriale).*

Ca un caz particular, orice spaţiu complex n-dimensional este $\mathbf{C}$-izomorf cu spaţiul $\mathcal{C}_n$ şi orice spaţiu real n-dimensional este $\mathbf{R}$-izomorf cu spaţiul $\mathcal{R}_n$.

Alte proprietăţi ale monomorfismelor şi epimorfismelor.

Proprietatea 2.8.1. Fie $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ un morfism de spaţii vectoriale. Considerăm mulţimea tuturor vectorilor $\varpi(x') \in \mathcal{K}''$ când x' parcurge întreg spaţiul $\mathcal{K}'$. Această mulţime constituie evident un subspaţiu $\mathcal{L}'' \subset \mathcal{K}''$, numit domeniul de valori al morfismului ϖ (sau imaginea lui ϖ şi este notat uneori Im ϖ). Este clar că *aplicaţia* $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{L}''$ *este epimorfism şi că dacă morfismul* $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ *este monomorfism, atunci morfismul* $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{L}''$ *este un izomorfism.*

Proprietatea 2.8.2. Fie $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ un morfism fixat. Considerăm mulţimea $\mathcal{L}'$ a tuturor vectorilor $x' \in \mathcal{K}'$ pentru care $\varpi(x') = 0$. Mulţimea $\mathcal{L}'$ este evident subspaţiu al spaţiului $\mathcal{K}'$, numit nucleul (sau spaţiul nul) al morfismului ϖ .Construim spaţiul cât $\mathcal{K}'/\mathcal{L}'$. Toate elementele x' care sunt în aceeaşi clasă $X' \in \mathcal{K}'/\mathcal{L}'$ sunt duse prin morfismul ϖ într-unul şi acelaşi element al spaţiului $\mathcal{K}''$; într-adevăr, pentru două astfel de elemente x' şi y' avem $x' - y' = z' \in \mathcal{L}'$, de unde

$$\varpi(x') - \varpi(y') = \varpi(z') = 0, \quad \varpi(x') = \varpi(y').$$

Asociem oricărei clase $X' \in \mathcal{K}'/\mathcal{L}'$ elementul $x'' = \varpi(x') \in \mathcal{K}''$, unde $x' \in X'$ este orice element fixat; am văzut mai înainte că x'' este definit în mod bine determinat. Notăm $x'' = \Omega(X')$. Aplicaţia Ω este un morfism de la spaţiul $\mathcal{K}'/\mathcal{L}'$ în $\mathcal{K}''$; el este monomorfism deoarece din faptul că $X' \neq Y', x \in X', y' \in Y'$, rezultă

$$\Omega(X') - \Omega(Y') = \varpi(x') - \varpi(y') = \varpi(x' - y') \neq 0.$$

Astfel, orice morfism $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ generează un monomorfism $\Omega : \mathcal{K}'/\mathcal{L}' \to \mathcal{K}''$. Dacă morfismul ϖ ar fi epimorfism, atunci monomorfismul Ω ar fi epimorfism, deci un epimorfism $\varpi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ dă naştere unui izomorfism $\Omega : \mathcal{K}'/\mathcal{L}' \to \mathcal{K}''$.

2.9 Endomorfisme ale spaţiului $\mathcal{K}_n$.

Considerăm un operator liniar$\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ care transformă spaţiul $\mathcal{X}$ în el însuşi (punând în definiţia generală a operatorului liniar $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$). Vom spune atunci că $\mathcal{A}$ este operator al lui $\mathcal{X}$ (operator acţionând în $\mathcal{X}$ sau, echivalent, endomorfism al lui $\mathcal{X}$).

Definiţie 2.9.1. *Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu vectorial peste câmpul* **K**. *Endomorfismul $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ se numeşte:*

1) automorfism *dacă este bijectiv;*

2) proiecţie *dacă $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$;*

3) involuţie sau structură produs *dacă $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$, unde $\mathcal{I}$ este transformarea identitate;*

4) structură complexă *dacă $\mathcal{A}^2 = -\mathcal{I}$;*

5) endomorfism nilpotent de indice *p dacă $\mathcal{A}^p = \mathcal{O}$, unde $p = 2, 3, ...$, iar $\mathcal{O}$ este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice 2 şi de rang maxim posibil se mai numeşte* **structură tangentă.**

Presupunem că operatorul $\mathcal{A}$ acţionează în spaţiul n-dimensional $\mathcal{X} = \mathcal{K}_n$. Alegem în spaţiul $\mathcal{X}$ o bază $e_1, e_2, ..., e_n$ şi aceeaşi bază este folosită şi în domeniul de valori al lui $\mathcal{A}$, pentru a construi matricea operatorului $\mathcal{A}$. Matricea A a operatorului $\mathcal{A}$ se construieşte prin formulele

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} e_i, \tag{2.9.1}$$

astfel încât coeficienţii $a_i^{(j)}$ formează de această dată o matrice pătratică de ordin n; aceasta se numeşte matricea operatorului $\mathcal{A}$ în baza $e_1, e_2, ..., e_n$ pe care o vom simboliza prin $\mathbf{B}= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.Vom nota uneori această matrice prin $A(\mathbf{B})$. Formulele corespunzătoare pentru coordonatele vectorului $y = \mathcal{A}x, y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j, x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, au forma

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j. \tag{2.9.2}$$

Fixând baza $\mathbf{B}= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se obţine o corespondenţă biunivocă între toţi operatorii liniari acţionând în spaţiul $\mathcal{K}_n$ şi toate matricile pătratice de ordin n având elementele din corpul **K**.

Exemplul 2.9.1. Operatorul care asociază oricărui vector din spaţiul $\mathcal{X}$ vectorul nul, este evident liniar. El se numeşte operatorul nul. Matricea operatorului nul în orice bază este matricea nulă.

Exemplul 2.9.2. Operatorul identic $\mathcal{E}$, care asociază oricărui vector $x \in \mathcal{X}$ acelaşi vector x. Matricea operatorului identic are forma

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Această matrice se numeşte matricea unitate.

Exemplul 2.9.3. Operatorul $\mathcal{A}$ care transformă orice vector x în λx, unde λ este un număr fixat din corpul $\mathbf{K}$, este liniar; el se numeşte operatorul de asemănare (cu coeficientul λ). În mod similar cu exemplul precedent, operatorul de asemănare în orice bază are matricea de forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2.9.4. În planul euclidian $\mathbf{E}_2$ vectorii pot fi determinaţi prin coordonatele polare, $x = \{\varphi, \rho\}$ .Operatorul $\mathcal{A}$ care transformă vectorul $x = \{\varphi, \rho\}$ în $\mathcal{A}x = \{\varphi + \varphi_0, \rho\}$ cu φ_0 unghi fixat, este un operator liniar (ceea ce se probează imediat). Acest operator se numeşte operator de rotaţie cu unghiul φ_0.Pentru construirea matricii operatorului de rotaţie alegem în planul $\mathbf{E}_2$ o bază formată din doi vectori unitari perpendiculari e_1, e_2. După rotaţia cu unghiul φ_0 vectorul e_1 trece în vectorul $(\cos\varphi_0)\, e_1 + (\sin\varphi_0)\, e_2$, iar vectorul e_2 în vectorul $(-\sin\varphi_0)\, e_1 + (\cos\varphi_0)\, e_2$. Aşadar, matricea operatorului de rotaţie în oricare din bazele indicate anterior are forma

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2.9.5. Fie $e_1, e_2, ..., e_n$ o bază oarecare în spaţiul n-dimensional $\mathcal{K}_n$. Asociem vectorului $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, vectorul $\mathcal{P}x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$, unde $m < n$. Operatorul $\mathcal{P}$ este liniar; el se numeşte operatorul de proiecţie pe subspaţiul $\mathcal{K}_m$ generat de vectorii $e_1, e_2, ..., e_m$. Pentru construirea matricii operatorului de proiecţie, observăm că sub acţiunea acestui operator vectorii $e_1, e_2, ..., e_m$ trec în ei înşişi, iar vectorii $e_{m+1}, ..., e_n$ în zero. De aceea, matricea operatorului de proiecţie în baza $e_1, e_2, ..., e_n$ are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2.9.6. Fie $e_1, e_2, ..., e_n$ o bază a spaţiului n-dimensional $\mathcal{K}_n$ şi fie n numere fixate $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Definim operatorul $\mathcal{A}$ pentru vectorii bazei astfel: $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1, \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2, ..., \mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$ şi pentru orice alt vector $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ este natural să definim prin liniaritate $\mathcal{A}x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k e_k$. Operatorul obţinut se numeşte operator diagonal relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$, sau operator diagonalizabil. Matricea unui operator diagonal relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$ are în această bază următoarea formă:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Elementele nenule se pot afla în această matrice numai pe diagonala principală. Această matrice se numeşte diagonală (de unde şi denumirea operatorului). Se poate observa cu uşurinţă că este posibil ca într-o altă bază $f_1, f_2, ..., f_n$, matricea unui operator diagonal relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$ să nu mai fie diagonală.

Operatorii liniari acţionând în spaţiul $\mathcal{X}$ pot fi adunaţi, înmulţiţi cu numere, după regulile generale prezentate la operaţii cu operatori liniari, obţinându-se noi operatori acţionând în $\mathcal{X}$.

Egalităţile (2.4.2.-2') de la operaţii asupra operatorilor liniari, arată că relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire cu numere, mulţimea tuturor operatorilor acţionând în spaţiul $\mathcal{X}$ este ea însăşi un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{K}$. În plus, pentru operatorii acţionând în spaţiul $\mathcal{X}$ produsul (compunerea) este totdeauna definit, obţinându-se ca rezultat un nou operator acţionând în $\mathcal{X}$. În particular, dacă $\mathcal{B}$ este un operator oarecare în $\mathcal{X}$, atunci

$$(\mathcal{BE})\, x = \mathcal{B}\,(\mathcal{E}x) = \mathcal{E}\,(\mathcal{B}x)\,,$$

astfel încât $\mathcal{BE} = \mathcal{EB} = \mathcal{B}$.

Definim puterile unui operator dat $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ după regulile

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}, \\
&\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}, \\
&\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2\mathcal{A} = (\mathcal{A}\mathcal{A})\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\mathcal{A}) = \mathcal{A}\mathcal{A}^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Are loc formula

$$\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^m\mathcal{A}^n \quad (m, n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{2.9.3}$$

care se demonstrează prin inducţie. Punem, de asemenea, prin definiţie $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$ (operatorul identic).

Fixăm în spaţiul $\mathcal{X}$ baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Atunci, oricărui operator liniar $\mathcal{A}$ acţionând în spaţiul $\mathcal{X}$ îi corespunde o matrice în această bază. Conform "operaţiilor corespunzătoare asupra matricilor", odată cu operatorii, matricile corespunzătoare se adună, se înmulţesc cu numere, se ridică la putere. În acest caz, se poate determina uşor dimensiunea spaţiului liniar al tuturor matricilor de ordin n. Anume, matricile E_{jk}, având un singur element nenul egal cu 1, situat pe linia j şi coloana k, sunt liniar independente; pe de altă parte, fiecare matrice de ordin n este combinaţie liniară a matricilor E_{jk} indicate. Aşadar, matricile E_{jk} constituie o bază în spaţiul tuturor matricilor pătratice de ordin n. Deoarece numărul matricilor E_{jk} este egal cu n^2, rezultă că dimensiunea spaţiului vectorial al tuturor matricilor de ordin n este egală cu n^2. Aceeaşi dimensiune n^2 o are evident şi spaţiul tuturor operatorilor liniari acţionând în spaţiul $\mathcal{K}_n$.

Exemplul 2.9.7. Înmulţirea cu numărul complex $\varpi = \alpha + i\beta$ este o transformare liniară $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \to z\varpi$ a planului complex $(z = x + iy)$, care poate fi scrisă cu ajutorul unei matrici reale de ordinul doi. Din formulele de înmulţire $(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ rezultă că în baza $\{1, i\}$, matricea corespunzătoare are forma

$$\widetilde{\varpi} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Astfel, numerele complexe $\varpi = \alpha + i\beta$ corespund biunivoc cu matricile reale $\widetilde{\varpi}$ de ordin doi; se observă cu uşurinţă că sumei şi produsului de numere le corespund suma şi produsul matricilor corespunzătoare. Se spune că matricile reale $\widetilde{\varpi}$ constituie o reprezentare a corpului numerelor complexe.

Exemplul 2.9.8. Notăm cu $\mathcal{B}_k\,(k \geq 0)$ operatorul de "deplasare cu k paşi"; prin definiţie, el transformă fiecare vector din bază, de exemplu vectorul e_m în vectorul e_{m-k} din bază (dacă $m - k > 0$) şi în vectorul nul (dacă $m-k \leq 0$). Evident, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{B}_k\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_{k+r}$; în particular, $\mathcal{B}_1^k = \mathcal{B}_k$. Matricea operatorului $\mathcal{B}_1$ are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

În cazul operatorului $\mathcal{B}_k$ matricea sa are forma $(k < n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinantul produsului a două matrici. Fie $A = (a_{jk})$ şi $B = (b_{jk})$ două $n \times n$-matrici oarecare şi $C = AB$ produsul lor. În virtutea teoremei 2.6.1. din cadrul "alte proprietăţi legate de înmulţirea matricilor" aplicată minorului $M_{1,2,\ldots,n}^{1,2,\ldots,n}(AB)$, adică însuşi determinantului matricii AB, obţinem

$$\det AB = (\det A)\,(\det B)\,.$$

Am demonstrat astfel următorul rezultat.

Teorema 2.9.1. *Determinantul produsului a două $n \times n$-matrici este egal cu produsul determinanţilor acestor matrici.*

Observaţia 2.9.1. Există şi demonstraţii directe ale acestei teoreme (care nu se bazează pe teorema 2.6.1. de la "alte proprietăţi legate de înmulţirea matricilor"). Iată una din aceste demonstraţii. Considerăm determinantul cvasitriunghiular de ordin $2n$

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} & (-1) & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & ... & b_{2n} & 0 & (-1) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} & 0 & 0 & ... & (-1) \\ 0 & ... & 0 & a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & ... & 0 & a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

care are valoarea egală cu produsul determinanţilor matricilor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad csi \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dar se poate obţine valoarea determinantului D şi pe o altă cale. Folosind numerele -1 situate în primele n linii şi ultimele n coloane ale determinantului D se pot anula toate elementele situate în ultimele n linii şi ultimele n coloane ale determinantului D. Pentru aceasta, este suficient să adunăm la linia $n+1$ a determinantului D, prima linie înmulţită cu a_{11}, a doua înmulţită cu a_{12}, ş.a.m.d. şi linia n înmulţită cu a_{1n}; apoi adunăm la linia $n+2$ a determinantului D prima linie înmulţită cu a_{21}, a doua înmulţită cu a_{22} etc.; în final adunăm la linia de ordin $2n$ prima linie înmulţită cu a_{n1}, a doua înmulţită cu a_{n2}, ş.a.m.d. linia n înmulţită cu a_{nn}. Ca rezultat se obţine

$$D = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} & -1 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & ... & b_{2n} & 0 & -1 & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} & 0 & 0 & ... & -1 \\ b_{11}a_{11} + ... + b_{n1}a_{1n} & ... & b_{1n}a_{11} + ... + b_{nn}a_{1n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_{11}a_{21} + ... + b_{n1}a_{2n} & ... & b_{1n}a_{21} + ... + b_{nn}a_{2n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & ... & ... & ... \\ b_{11}a_{n1} + ... + b_{n1}a_{nn} & ... & b_{1n}a_{n1} + ... + b_{nn}a_{nn} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

şi dezvoltând determinantul D după ultimele n linii, rezultă

$$D = (-1)^{1+...+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + ... + b_{n1}a_{1n} & ... & b_{1n}a_{11} + ... + b_{nn}a_{1n} \\ .... & ... & .... \\ b_{11}a_{n1} + ... + b_{n1}a_{nn} & ... & b_{1n}a_{n1} + ... + b_{nn}a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + ... + a_{1n}b_{n1} & ... & a_{11}b_{1n} + ... + a_{1n}b_{nn} \\ .... & ... & .... \\ a_{n1}b_{11} + ... + a_{nn}b_{n1} & ... & a_{n1}b_{1n} + ... + a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} = \det(AB).$$

Comparând acest rezultat cu cel obţinut la început, rezultă tocmai relaţia cerută. În particular, observăm că dacă înmulţim două matrici pătratice nesingulare A şi B (adică $\det A \neq 0, \det B \neq 0$), atunci matricea AB este nesingulară. Dacă una din matrici, de exemplu A, este singulară ($\det A = 0$), atunci $\det AB = 0$.

b) Operatorul invers.

Un operator $\mathcal{B}$ acţionând în spaţiul $\mathcal{X}$ se numeşte invers la stânga al unui operator $\mathcal{A}$ acţionând în acelaşi spaţiu $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{BA} = \mathcal{E}$. În acest caz, operatorul $\mathcal{A}$ se numeşte invers la dreapta pentru operatorul $\mathcal{B}$.

1) Este posibil ca operatorul $\mathcal{A}$ să aibă mai mulţi inverşi la stânga şi nici un invers la dreapta, sau invers, mai mulţi inverşi la dreapta şi nici unul la stânga. Să presupunem că operatorul $\mathcal{A}$ admite un invers la stânga $\mathcal{P}$ şi un invers la dreapta $\mathcal{Q}$; atunci are loc egalitatea

$$\mathcal{P} = \mathcal{PE} = \mathcal{P}(\mathcal{AQ}) = (\mathcal{PA})\,\mathcal{Q} = \mathcal{EQ} = \mathcal{Q}. \tag{2.9.4}$$

Fixăm $\mathcal{Q}$; vedem că orice operator invers la stânga $\mathcal{P}$ coincide cu $\mathcal{Q}$ şi în acest mod, $\mathcal{P}$ este unic determinat. În mod similar, în cazul considerat, operatorul invers la dreapta $\mathcal{Q}$ este de asemenea unic determinat. Acest operator $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ unic determinat ca operator simultan invers la stânga şi la dreapta al operatorului $\mathcal{A}$, se numeşte operator invers al operatorului $\mathcal{A}$ şi se notează prin $\mathcal{A}^{-1}$. Un operator $\mathcal{A}$ care admite invers, se numeşte inversabil.

2) Considerăm cazul unui operator $\mathcal{A}$ acţionând în spaţiul n-dimensional $\mathcal{K}_n$. Fie A matricea operatorului $\mathcal{A}$ într-o anumită bază fixată $e_1, e_2, ..., e_n$. Este posibil una din următoarele două situaţii: sau $\det A \neq 0$ sau $\det A = 0$. În primul caz, rangul matricii A este egal cu n şi conform teoremei 2.7.5. din "Domeniul de valori şi spaţiul nul (nucleul) al unui operator liniar", matricea A admite inversă şi la stânga şi la dreapta. În mod corespunzător, operatorul $\mathcal{A}$ admite invers la stânga şi la dreapta. Conform punctului 1), operatorul $\mathcal{A}$ este inversabil.

Dacă $\det A = 0$, atunci aplicând din nou teorema 2.7.5., matricea A nu admite nici inversă la stânga şi nici inversă la dreapta; deci operatorul $\mathcal{A}$ corespunzător, acţionând în $\mathcal{K}_n$, nu admite nici invers la stânga şi nici invers la dreapta.

c) Matricea operatorului invers.

Fie $\mathcal{A}$ un operator inversabil într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ operatorul invers al lui $\mathcal{A}$. Alegem o bază $e_1, e_2, ..., e_n$ în $\mathcal{X}$ şi notăm prin $\left(a_i^{(j)}\right)$ şi $\left(b_i^{(j)}\right)$ matricile operatorilor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$. Căutăm expresia elementelor $b_i^{(j)}$ cu ajutorul elementelor $a_i^{(j)}$. Fixăm numărul i şi scriind succesiv elementele liniei i din matricea $E = AB$, prin utilizarea formulelor (2.6.5) de la "operaţii corespunzătoare asupra matricilor", rezultă

$$\begin{cases} b_i^{(1)}a_1^{(1)} + ... + b_i^{(n)}a_n^{(1)} = 0, \\ .... \\ b_i^{(1)}a_1^{(i)} + ... + b_i^{(n)}a_n^{(i)} = 1, \\ .... \\ b_i^{(1)}a_1^{(n)} + ... + b_i^{(n)}a_n^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Necunoscutele $b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, ..., b_i^{(n)}$ se determină din acest sistem de ecuaţii liniare aplicând regula lui Cramer, deoarece prin ipoteză $\det A \neq 0$. Rezolvând sistemul şi în soluţiile respective, dezvoltând determinantul de la numărător, se obţine

$$b_i^{(j)} = \frac{A_j^{(i)}}{\det A}\ , \tag{2.9.5}$$

unde $A_j^{(i)}$ este complementul algebric al elementului $a_i^{(j)}$ din matricea A. Astfel, elementul $b_i^{(j)}$ al matricii inverse A^{-1} este egal cu raportul dintre complementul algebric al elementului $a_i^{(j)}$ al matricii A şi determinantul lui A. Am obţinut astfel următoarea teoremă.

Teorema 2.9.2. *Pentru orice matrice nesingulară* $A = \left(a_i^{(j)}\right)$ *există şi este unică o matrice inversă* $B = \left(b_i^{(j)}\right)$ *pentru care*

$$AB = BA = I \text{ (I este matricea unitate).}$$

Elementul matricii B se calculează după formulele (2.9.5).

Operatorul invers al unui operator $\mathcal{A}$ inversabil, se notează cu $\mathcal{A}^{-1}$. Apoi $(\mathcal{A}^{-1})^k$, pentru k natural, se notează $\mathcal{A}^{-k}$. Este uşor de demonstrat prin inducţie că formula (2.9.3) are loc şi pentru exponenţi negativi.

Notaţii similare se aplică pentru puterile matricii inverse. Extinderea formulei (2.9.3) la puteri de matrici cu exponenţi negativi rezultă direct din justeţea acestei extinderi pentru operatori.

2.10 Subspaţii invariante.

Într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ presupunem dat un operator liniar $\mathcal{A} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

Definiţia 2.10.1. *Un subspaţiu $\mathcal{K}'$ al lui $\mathcal{K}$ îl vom numi invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}$ (sau $\mathcal{A}$-invariant) dacă din faptul că $x \in \mathcal{K}'$, rezultă $\mathcal{A}x \in \mathcal{K}'$.*

În particular, subspaţiile banale-subspaţiul nul şi întreg spaţiul sunt invariante pentru orice operator liniar; ne vor interesa desigur subspaţiile invariante nebanale.

Exemplul 2.10.1. Operatorul nul şi operatorul identic, au orice subspaţiu ca invariant.

Exemplul 2.10.2. Operatorul de rotaţie cu unghiul $\varphi_0 \neq m\pi$ (m întreg) nu admite subspaţii invariante nebanale.

Exemplul 2.10.3. Operatorul de proiecţie are de exemplu următoarele subspaţii invariante: subspaţiul $\mathcal{K}'$ al vectorilor $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ care nu se modifică prin proiecţie şi subspaţiul $\mathcal{K}''$ al vectorilor $y = \sum\limits_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k$ care sunt transformaţi în zero (spaţiul $\mathcal{K}$ se presupune a fi n-dimensional, iar $e_1, e_2, ..., e_n$ o bază în $\mathcal{K}$).

Exemplul 2.10.4. Orice subspaţiu generat de o parte din vectorii unei baze $e_1, e_2, ..., e_n$ este subspaţiu invariant pentru un operator diagonal.

Presupunem că un operator $\mathcal{A}$ ce acţionează într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$, admite ca invariant un subspaţiu m-dimensional $\mathcal{K}_m$. Alegem în $\mathcal{K}_n$ o bază $e_1, e_2, ..., e_n$ astfel încât primii m vectori $e_1, e_2, ..., e_m$ să fie situaţi în subspaţiul $\mathcal{K}_m$. Atunci vom putea scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= a_1^{(1)} e_1 + ... + a_1^{(m)} e_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}e_m &= a_m^{(1)} e_1 + ... + a_m^{(m)} e_m, \end{aligned}$$

şi matricea operatorului $\mathcal{A}$ în baza indicată va avea forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & ... & a_m^{(1)} & a_{m+1}^{(1)} & ... & a_n^{(1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1^{(m)} & ... & a_m^{(m)} & a_{m+1}^{(m)} & ... & a_n^{(m)} \\ 0 & ... & 0 & a_{m+1}^{(m+1)} & ... & a_n^{(m+1)} \\ 0 & ... & 0 & a_{m+1}^{(n)} & ... & a_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

În primele m coloane toate elementele situate pe linia $m+1$ şi următoarele sunt egale cu zero. Invers, dacă matricea unui operator liniar $\mathcal{A}$ are o astfel de formă, atunci subspaţiul generat de vectorii $e_1, e_2, ..., e_m$ este $\mathcal{A}$-invariant.

Presupunem că spaţiul $\mathcal{K}_n$ poate fi reprezentat sub forma unei sume directe de subspaţii invariante $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, ..., \mathcal{X}_p$. Alegem o bază a spaţiului $\mathcal{K}_n$ astfel încât vectorii $e_1, e_2, ..., e_r$ să aparţină lui $\mathcal{X}_1$; $f_1, f_2, ..., f_s$ să aparţină lui $\mathcal{X}_2$,..., iar $h_1, h_2, ..., h_t$ să aparţină lui $\mathcal{X}_p$. Atunci matricea operatorului $\mathcal{A}$ are forma cvasidiagonală

$$A = \begin{pmatrix} A_e & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_f & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & A_h \end{pmatrix}.$$

Blocurile pătratice diagonale ale lui A sunt matrici formate cu elementele $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, ..., $c_k^{(j)}$astfel încât

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}e_j &= \sum_{k=1}^{r} a_k^{(j)} e_k, \\
\mathcal{A}f_j &= \sum_{k=1}^{s} b_k^{(j)} f_k, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{A}h_j &= \sum_{k=1}^{t} c_k^{(j)} h_k \ ;
\end{aligned}$$

şi în afara elementelor blocurilor diagonale, toate elementele din A sunt nule. Invers, dacă matricea unui operator $\mathcal{A}$ într-o anumită bază are structură cvasidiagonală, atunci spaţiul $\mathcal{K}_n$ se descompune în sumă directă de subspaţii generate de grupele corespunzătoare ale elementelor bazei.

2.11 Vectori proprii şi valori proprii.

Un rol deosebit îl joacă subspaţiile invariante de dimensiune 1 relativ la un operator $\mathcal{A}$; ele se mai numesc direcţii invariante sau direcţii proprii. Orice vector nenul aparţinând unei direcţii invariante (unidimensionale) a unui operator liniar $\mathcal{A}$ se numeşte vector propriu al operatorului $\mathcal{A}$; altfel spus, un vector $x \neq 0$ se numeşte vector propriu al unui operator $\mathcal{A}$ dacă operatorul $\mathcal{A}$ transformă vectorul x într-un vector coliniar cu x

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \tag{2.11.1}$$

Numărul λ care figurează în această egalitate se numeşte valoare proprie (sau număr propriu) pentru operatorul $\mathcal{A}$, corespunzând vectorului propriu x.

Exemplul 2.11.1. În cazul operatorului nul, operatorului identic sau operatorului de asemănare, fiecare vector nenul este vector propriu al operatorului, corespunzător cu valorile proprii respectiv $0, 1, \lambda$.

Exemplul 2.11.2. Operatorul de rotaţie cu un unghi diferit de $m\pi$, m fiind întreg, nu are vectori proprii.

Exemplul 2.11.3. Operatorul de proiecţie, prin însăşi definiţia lui, admite vectori proprii de forma $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ şi $y = \sum\limits_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k$ cu valorile proprii egale cu 1 şi respectiv 0. Se poate arăta că operatorul de proiecţie nu are alţi vectori proprii.

Exemplul 2.11.4. Operatorul diagonal admite, prin definiţia lui, vectorii proprii $e_1, e_2, ..., e_n$ cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ respectiv.

Indicăm două proprietăţi simple ale vectorilor proprii.

Lema 2.11.1. *Orice vectori proprii $x_1, x_2, ..., x_m$ ai unui operator $\mathcal{A}$ care corespund la valori proprii distincte două câte două $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Această lemă se demonstrează prin inducţie după m. Evident, lema este adevărată pentru $m = 1$. Admitem că lema are loc pentru orice $m-1$ vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$; arătăm că ea rămâne adevărată şi pentru orice m vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$. Presupunem contrariul, admitem că între m vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ ar exista o dependenţă liniară

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0,$$

unde $\alpha_1 \neq 0$ (de exemplu). Aplicând acestei egalităţi operatorul $\mathcal{A}$ se obţine

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_m \lambda_m x_m = 0.$$

Înmulţim prima egalitate cu λ_m şi o scădem din cea de a doua; obţinem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)x_2 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0,$$

de unde, conform ipotezei de inducţie, toţi coeficienţii trebuie să fie nuli. În particular, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$, ceea ce contravine condiţiilor $\alpha_1 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_m$. Aşadar, presupunerea făcută nu este adevărată şi vectorii $x_1, x_2, ..., x_m$ sunt liniar dependenţi. ■

În particular, într-un spaţiu n-dimensional, orice operator $\mathcal{A}$ nu poate avea mai mult de n vectori proprii la valori proprii distincte.

Lema 2.11.2. *Toţi vectorii proprii ai unui operator liniar $\mathcal{A}$ corespunzând unei aceleiaşi valori proprii fixate λ, formează un subspaţiu $\mathcal{K}^{(\lambda)} \subset \mathcal{K}$.*

Demonstraţie. Întradevăr, dacă $\mathcal{A}x_1 = \lambda x_1$ şi $\mathcal{A}x_2 = \lambda x_2$, atunci $\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A} x_1 + \beta \mathcal{A} x_2 = \alpha \lambda x_1 + \beta \lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$ şi de aici rezultă lema. ■

Subspaţiul $\mathcal{K}^{(\lambda)}$ se numeşte subspaţiul propriu al operatorului $\mathcal{A}$ corespunzând valorii proprii λ.

Vom indica în continuare modul de calcul al coordonatelor vectorilor proprii ai unui operator $\mathcal{A}$, dat prin matricea sa într-o anumită bază $e_1, e_2, ..., e_n$ a spaţiului $\mathcal{K}_n$. Admitem că vectorul $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ este vector propriu al operatorului $\mathcal{A}$, deci există λ astfel încât $\mathcal{A}x = \lambda x$. Folosind formulele (2.3.3) de la "scrierea matricială a operatorilor liniari" se pot scrie aceste relaţii cu ajutorul coordonatelor:

$$\begin{aligned}
\lambda\xi_1 &= a_1^{(1)}\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + ... + a_1^{(n)}\xi_n,\\
\lambda\xi_2 &= a_2^{(1)}\xi_1 + a_2^{(2)}\xi_2 + ... + a_2^{(n)}\xi_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\lambda\xi_n &= a_n^{(1)}\xi_1 + a_n^{(2)}\xi_2 + ... + a_n^{(n)}\xi_n,
\end{aligned}$$

sau

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(a_1^{(1)} - \lambda\right)\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + ... + a_1^{(n)}\xi_n = 0,\\
a_2^{(1)}\xi_1 + \left(a_2^{(2)} - \lambda\right)\xi_2 + ... + a_2^{(n)}\xi_n = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_n^{(1)}\xi_1 + a_n^{(2)}\xi_2 + ... + \left(a_n^{(n)} - \lambda\right)\xi_n = 0.
\end{array}\right. \tag{2.11.2}$$

Acest sistem liniar omogen de ecuaţii relativ la mărimile $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ admite o soluţie nenulă în acel şi numai în acel caz când determinantul sistemului este egal cu zero, adică:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_1^{(1)} - \lambda & a_1^{(2)} & ... & a_1^{(n)}\\
a_2^{(1)} & a_2^{(2)} - \lambda & ... & a_2^{(n)}\\
\dots\dots & \dots\dots & ... & \dots\\
a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & ... & a_n^{(n)} - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{2.11.3}$$

Polinomul de grad n în λ aflat în membrul stâng al acestei ecuaţii se numeşte polinom caracteristic al matricii A. Oricărei rădăcini $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ a acestui polinom îi corespunde cel puţin un vector propriu, care poate fi determinat după înlocuirea lui λ cu λ_0 în relaţiile (2.11.2), prin rezolvarea sistemului compatibil obţinut relativ la $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Rezultatul obţinut arată printre altele că deşi matricea operatorului $\mathcal{A}$ depinde de alegerea bazei $e_1, e_2, ..., e_n$, totuşi rădăcinile polinomului caracteristic al acestei matrici nu depind de alegerea bazei. În afara determinanţilor, există şi alte funcţii de elementele matricii unui operator care rămân neschimbate prin trecerea la o nouă bază. Pentru a construi astfel de funcţii, considerăm operatorul $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, unde λ este un parametru luat din corpul $\mathbf{K}$. Matricea acestui operator în baza $\mathbf{B}= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este evident matricea $A_{(\mathbf{B})} - \lambda I$, iar în baza $\mathbf{B}$'$= \{f_1, f_2, ..., f_n\}$-matricea $A_{(\mathbf{B'})} - \lambda I$. Conform celor demonstrate la "transformarea matricii unui operator liniar", pentru orice λ avem

$$\det\left(A_{(\mathbf{B})} - \lambda I\right) = \det\left(A_{(\mathbf{B'})} - \lambda I\right).$$

În ambii membrii se află polinoame de grad n în λ. Deoarece aceste polinoame sunt egale, atunci coeficienţii diverselor puteri ale lui λ sunt aceiaşi.

Aceşti coeficienţi sunt funcţii de elementele matricii operatorului considerat, care rămân deci nemodificate la schimbarea bazei. Explicităm forma acestei funcţii. Determinantul matricii $A_{(\mathbf{B})} - \lambda I$ are forma

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \lambda & a_1^{(2)} & ... & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} - \lambda & ... & a_2^{(n)} \\ .... & .... & ... & ..... \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & ... & a_n^{(n)} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)\,\lambda^n + \Delta_1 \lambda^{n-1} + ... + \Delta_{n-1}\lambda + \Delta_n.$$

Coeficientul Δ_1 al lui λ^{n-1} este egal cu suma elementelor diagonale $a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + ... + a_n^{(n)}$, luată cu semnul $(-1)^{n-1}$, aşa cum se vede imediat folosind definiţia determinantului; acest număr se numeşte urma operatorului $\mathcal{A}$. Coeficientul Δ_2 al lui λ^{n-2} este suma tuturor minorilor diagonali de ordinul 2, luată cu semnul $(-1)^{n-2}$ (un minor $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ se numeşte diagonal dacă $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_k = j_k$). În mod similar, coeficientul Δ_k al lui λ^{n-k} este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k, luată cu semnul $(-1)^{n-k}$. În sfârşit, coeficientul Δ_n al lui λ^0, adică termenul liber, este egal chiar cu determinantul operatorului. Aşadar, polinomul $\det\left(A_{(\mathbf{B})} - \lambda I\right)$ care nu depinde de alegerea bazei în spaţiul vectorial, poartă numele de polinom caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$. Distingem câteva posibilităţi care pot apare în rezolvarea ecuaţiei caracteristice (2.11.3).

a) Cazul când ecuaţia nu are rădăcini în corpul K. Dacă ecuaţia $\Delta(\lambda) = 0$ nu are rădăcini în corpul $\mathbf{K}$, atunci operatorul liniar $\mathcal{A}$ nu are vectori proprii în spaţiul $\mathcal{K}_n$.

De exemplu, operatorul de rotaţie cu unghiul $\varphi_0 \neq m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ în planul $\mathbf{E}_2$ nu are vectori proprii, aşa după cum s-a observat deja. Acest fapt evident geometric, se stabileşte uşor şi pe cale algebrică. Într-adevăr, ecuaţia (2.11.3) pentru operatorul de rotaţie se scrie

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_0 - \lambda & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

şi după dezvoltare

$$1 - 2\lambda\cos\varphi_0 + \lambda^2 = 0,$$

dacă $\lambda_0 \neq m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ această ecuaţie nu are rădăcini reale.

b) Dacă K = C este corpul numerelor complexe, atunci conform teoremei fundamentale a algebrei, ecuaţia (2.11.3) are întotdeauna o rădăcină $\lambda_0 \in \mathbf{K}$. Astfel, în spaţiul $\mathbf{C}_n$ orice operator liniar are cel puţin un vector propriu.

c) Cazul a n rădăcini distincte. Dacă toate cele n rădăcini $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ale ecuaţiei $\Delta(\lambda) = 0$ sunt situate în corpul $\mathbf{K}$ şi sunt distincte, atunci în spaţiul $\mathcal{K}_n$ se pot găsi n vectori proprii distincţi ai operatorului $\mathcal{A}$ rezolvând sistemul (2.11.2) succesiv pentru $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Conform lemei 2.11.1. vectorii proprii $f_1, f_2, ..., f_n$ vor fi liniar independenţi. Considerăm baza formată din aceşti vectori şi construim matricea operatorului $\mathcal{A}$ în această bază. Deoarece

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f_1 &= \lambda_1 f_1, \\ \mathcal{A}f_2 &= \lambda_2 f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}f_n &= \lambda_n f_n, \end{aligned}$$

matricea $A_{(\mathbf{B'})}$ are forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{2.11.4}$$

unde **B'**$= \{f_1, f_2, ..., f_n\}$.

Folosind definiţia operatorului diagonalizabil, putem formula rezultatul obţinut în forma următoare: în spaţiul $\mathcal{K}_n$ orice operator liniar a cărui matrice (într-o bază oarecare) are ca polinom caracteristic un polinom cu n rădăcini distincte în corpul **K** este diagonalizabil; matricea acestui operator construită într-o bază formată cu vectorii proprii ai săi este diagonală şi elementele ei diagonale sunt exact valorile proprii ale operatorului.

d) Pe de altă parte, dacă operatorul $\mathcal{A}$ într-o anumită bază $f_1, f_2, ..., f_n$ a spaţiului $\mathcal{K}_n$ admite o matrice diagonală (2.11.4) cu elemente nu neapărat distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, pe diagonala principală, atunci vectorii $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt proprii, iar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii corespunzătoare pentru $\mathcal{A}$.

Arătăm că operatorul $\mathcal{A}$ nu are în acest caz alte valori proprii distincte de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Într-adevăr, dacă λ este valoare proprie corespunzând vectorului propriu $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j f_j$, atunci din egalitatea $\mathcal{A}f = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j f_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{A}f_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j f_j = \lambda f = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j f_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda \beta_j f_j$, rezultă

$$\lambda \beta_j = \lambda \beta_j \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{2.11.5}$$

Printre numerele $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ există cel puţin unul diferit de zero; de exemplu, $\beta_1 \neq 0$. Atunci din egalitatea (2.11.5) pentru $j = 1$, rezultă $\lambda = \lambda_1$, ceea ce trebuia arătat.

e) Cazul unei rădăcini multiple. Fie $\lambda = \lambda_0$ o rădăcină a ecuaţiei (2.11.3) de multiplicitate $r \geq 1$. Se pune următoarea problemă: care este dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător $\mathcal{K}^{(\lambda_0)}$ sau, cu alte cuvinte, câte soluţii liniar independente admite sistemul (2.11.2) pentru $\lambda = \lambda_0$? Cunoscând rangul matricii sistemului, putem da un răspuns precis la această întrebare. Dar va fi util de legat acest răspuns numai de multiplicitatea r a rădăcinii λ_0.

În exemplele 2.9.1-3. şi 2.9.6. date la endomorfisme, după cum se observă imediat, dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu $\mathcal{K}^{(\lambda_0)}$ coincide cu multiplicitatea valorii proprii corespunzătoare λ_0 ca rădăcină a polinomului caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$. Totuşi, în cazul general acest fapt nu are loc. Considerăm operatorul $\mathcal{A}$ în $\mathcal{R}_2$ dat prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \mu & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

unde $\mu \neq 0$ este arbitrar. Polinomul caracteristic este $(\lambda_0 - \lambda)^2$ şi admite rădăcina dublă $\lambda = \lambda_0$. Sistemul (2.11.2) are în acest caz forma

$$\begin{aligned} 0\xi_1 + 0\xi_2 &= 0, \\ \mu\xi_1 + 0\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

şi admite ca soluţie $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ (unică până la un factor numeric). Aşadar, subspaţiul propriu al operatorului $\mathcal{A}$ corespunzând valorii proprii $\lambda = \lambda_0$ are dimensiunea 1, deci mai mică decât multiplicitatea rădăcinii λ_0. Se poate dovedi că în general dimensiunea subspaţiului propriu $\mathcal{K}^{(\lambda_0)}$ nu depăşeşte multiplicitatea rădăcinii λ_0, însă acest fapt este conţinut în cadrul rezultatului pe care îl vom prezenta în continuare.

2.12 Forma canonică Jordan.

Teorema 2.12.1. *Dimensiunea unui subspaţiu propriu al endomorfismului $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare subspaţiului.*

Demonstraţie. Fie λ_0 o valoare proprie multiplă de ordinul m şi $\mathcal{K}^{(\lambda_0)}$ subspaţiul propriu corespunzător. Notăm $\dim \mathcal{K}^{(\lambda_0)} = p < n$. Fie $\{e_1, e_2, ..., e_p\} \subset \mathcal{K}^{(\lambda_0)}$ o bază în subspaţiul propriu. Completăm această bază până la o bază în $\mathcal{K}_n$ de forma $\{e_1, e_2, ..., e_p, f_{p+1}, ..., f_n\}$. Întrucât vectorii e_i, $i = 1, 2, ..., p$ sunt vectori proprii corespunzători la valoarea proprie λ_0, avem $\mathcal{A}e_i = \lambda e_i$, $i = 1, 2, ..., p$ şi $\mathcal{A}f_j = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k^{(j)} e_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k^{(j)} f_k$, $j = p + 1, ..., n$.

Matricea lui $\mathcal{A}$ în această bază este

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & ... & 0 & a_1^{(p+1)} & ... & a_1^{(n)} \\ 0 & \lambda_0 & ... & 0 & a_2^{(p+1)} & ... & a_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_0 & a_p^{(p+1)} & ... & a_p^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_n^{(p+1)} & ... & a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

aşa încât polinomul caracteristic al lui $\mathcal{A}$ are forma $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(\lambda_0-\lambda)^p\,\delta(\lambda)$, unde $\delta(\lambda)$ este un determinant de ordinul $n-p$ (numărul total al rădăcinilor $\lambda=\lambda_0$ ale polinomului caracteristic $P(\lambda)$ este m şi deci dacă $\delta(\lambda_0)=0$ atunci din numărul total de rădăcini m o parte se află în $\delta(\lambda_0)\Rightarrow p<m$; dacă $\delta(\lambda_0)\neq 0$ atunci toate rădăcinile $\lambda=\lambda_0$ se regăsesc din $(\lambda-\lambda_0)^p$ şi deci $p=m$). În concluzie, $\delta(\lambda_0)=0$ implică $p<m$, iar $\delta(\lambda_0)\neq 0$ implică $p=m$. Deci $p\leq m$. ■

Teorema 2.12.2. *Un endomorfism $\mathcal{A}:\mathcal{K}_n\to\mathcal{K}_n$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic are toate rădăcinile în câmpul* $\mathbf{K}$ *peste care este luat $\mathcal{K}_n$ şi dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.*

Demonstraţie. Admitem că $\mathcal{A}:\mathcal{K}_n\to\mathcal{K}_n$ este diagonalizabil. Rezultă că există o bază $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ în $\mathcal{K}_n$ formată din vectorii proprii pentru $\mathcal{A}$ faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ este diagonală.

Fie $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}...(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$, adică λ_i, $i=1,2,...,p$ sunt valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ de multiplicităţi m_i, cu $\sum\limits_{i=1}^{p}m_i=n$. Fără a afecta generalitatea, putem admite că primii m_1 vectori din baza $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ corespund lui λ_1, următorii m_2 lui λ_2 etc. În concluzie, vectorii $\{e_1,e_2,...,e_{m_1}\}\subset\mathcal{K}^{(\lambda_1)}$ aparţin subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii λ_1, ceea ce înseamnă că numărul lor m_1 este mai mic sau cel mult egal cu $\dim\mathcal{K}^{(\lambda_1)}$: $m_1\leq\dim\mathcal{K}^{(\lambda_1)}$. Pe de altă parte, conform teoremei 2.12.1. avem $\dim\mathcal{K}^{(\lambda_1)}\leq m_1$. În concluzie $\dim\mathcal{K}^{(\lambda_1)}=m_1$. Analog, rezultă $\dim\mathcal{K}^{(\lambda_i)}=m_i,\ \ i=1,2,...,p$.

Reciproc, admitem că $\dim\mathcal{K}^{(\lambda_i)}=m_i,\ \ i=1,2,...,p$. Atunci fie $\mathbf{B}=\left\{e_1,e_2,...,e_{m_1},e_{m_1+1},...,e_{m_2},...,e_{m_{p-1}+1},...,e_{m_p}\right\},\ \sum\limits_{i=1}^{p}m_i=n$ o mulţime de vectori din $\mathcal{K}_n$ astfel încât primii m_1 vectori să constituie o bază în $\mathcal{K}^{(\lambda_1)}$, următorii m_2 să constituie o bază în $\mathcal{K}^{(\lambda_2)}$ şi aşa mai departe. Utilizând inducţia asupra lui p se dovedeşte că $\mathbf{B}$ este o bază a lui $\mathcal{K}_n$. Faţă de această bază, matricea lui $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_1 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & \lambda_p & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & 0 & \lambda_p & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & 0 & 0 & ... & \lambda_p \end{pmatrix}$$

adică o matrice diagonală. ■

Consecinţă 2.12.1. Dacă $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este diagonalizabil, atunci $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}^{(\lambda_1)} \oplus \mathcal{K}^{(\lambda_2)} \oplus ... \oplus \mathcal{K}^{(\lambda_p)}$.

Practic, pentru diagonalizarea unui endomorfism $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ procedăm în felul următor:

1) Fixăm o bază în $\mathcal{K}_n$ şi determinăm matricea $A = (a_{ij})$ a lui $\mathcal{A}$ în această bază;

2) Aflăm valorile proprii care sunt soluţiile în $\mathbf{K}$ ale ecuaţiei $P(\lambda) = 0$.

3) Dacă există p $(p \leq n)$ valori proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, ..., m_p$, calculăm rangul fiecărei matrice $A - \lambda_j I$, $j = 1, 2, ..., p$. Dacă $rang\,(A - \lambda_j I) = n - m_j$, $j = 1, 2, ..., p$, $\dim \mathcal{K}^{(\lambda_j)} = \dim N\,(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ este operatorul unitate) este numărul de soluţii independente ale sistemului omogen $(A - \lambda_j I)\,X = 0$, $j = 1, 2, ..., p$, atunci conform teoremei 2.12.2., $\mathcal{A}$ este diagonalizabil.

4) Se rezolvă cele p sisteme omogene $(A - \lambda_j I)\,X = 0$, $j = 1, 2, ..., p$. Un sistem fundamental de soluţii pentru un asemenea sistem reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_j $(\,j = 1, 2, ..., p)$.

5) Matricea lui $\mathcal{A}$, în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$, are pe diagonală elementele $\lambda_1, ..., \lambda_1; ...; \lambda_p, ..., \lambda_p$, adică valorile proprii.

6) Notăm prin $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ matricea diagonală ataşată lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$. Dacă $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ este matricea ale cărei coloane sunt vectorii proprii care alcătuiesc noua bază a lui $\mathcal{K}_n$, adică matricea de trecere de la baza iniţială din $\mathcal{K}_n$ (baza canonică în $\mathbf{R}^n$) la baza formată din vectorii proprii, atunci

$$D = C^{-1}AC.$$

Forma Jordan

Fie $\mathcal{K}_n$ un spaţiu vectorial peste câmpul $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$) şi $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ un endomorfism. Matricea A a endomorfismului $\mathcal{A}$ depinde de alegerea bazei în

$\mathcal{K}_n$. Uneori această matrice poate fi diagonalizată, alteori nu. Condiţiile în care matricea A se poate diagonaliza au fost date în punctul **c)** de la "valori şi vectori proprii", precum şi în teorema 2.12.2. Una dintre formele relativ simple şi utile, care se poate obţine în unele dintre cazurile când nu este posibilă diagonalizarea, este forma Jordan.

Fie $\lambda \in \mathbf{K}$. Matricile de tipul

$$(\lambda),\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda\end{pmatrix},$$

se numesc celule Jordan ataşate scalarului λ.

Definiţie 2.12.1. *Spunem că endomorfismul $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este adus la forma Jordan dacă există o bază în $\mathcal{K}_n$ faţă de care matricea*

$$J = \begin{pmatrix}J_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & J_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & J_s\end{pmatrix}$$

să reprezinte pe $\mathcal{A}$, unde $J_1, J_2, ..., J_s$ sunt celule Jordan ataşate vectorilor proprii λ_i, $i = 1, 2, ..., s$ ale endomorfismului $\mathcal{A}$.

O celulă Jordan de tipul p ataşată unei valori proprii λ multiplă de ordinul $s \geq p$, corespunde vectorilor liniar independenţi $e_1, e_2, ..., e_p$, astfel încât $\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1, \mathcal{A}e_2 = e_1 + \lambda e_2, ..., \mathcal{A}e_p = e_{p-1} + \lambda e_p$. Vectorul e_1 este propriu, iar vectorii $e_2, ..., e_p$ se numesc vectori principali.

Există endomorfisme ale spaţiilor vectoriale reale care nu pot fi aduse la forma Jordan şi anume acelea pentru care ecuaţia caracteristică nu are toate rădăcinile în $\mathbf{R}$. Discuţia următoare va pune în evidenţă că endomorfismele spaţiilor vectoriale complexe pot fi aduse întotdeauna la forma Jordan.

Observaţia 2.12.1. Forma diagonală a unui endomorfism diagonalizabil este un caz particular de formă canonică Jordan şi anume cazul când toate celulele Jordan sunt de ordinul unu.

Observaţia 2.12.2. Forma canonică Jordan nu este unică, dar numărul celulelor Jordan (egal cu numărul total de vectori proprii liniar independenţi ai lui $\mathcal{A}$) ca şi ordinul celulelor Jordan sunt unice pentru un endomorfism $\mathcal{A}$, dat.

Observaţia 2.12.3. Ordinea celulelor Jordan pe diagonala formei canonice Jordan depinde de ordinea vectorilor din bază.

Teorema 2.12.3. *Fie $\mathcal{K}_n$ un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$). Dacă $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este un endomorfism şi $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sunt* *valori proprii distincte ale lui $\mathcal{A}$ cu multiplicităţile $m_1, ..., m_p$, $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$, atunci există p subspaţii vectoriale $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{K}_n$, $j = 1, 2, ..., p$, invariante faţă de $\mathcal{A}$, de dimensiuni m_j $j = 1, 2, ..., p$, astfel încât $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{K}_p$, iar $\mathcal{A}/\mathcal{K}_j = \mathcal{N}_j + \lambda_j \mathcal{E}_{m_j}$, $j = 1, 2, ..., p$, unde $\mathcal{N}_j$ sunt endomorfisme nilpotente de diferite ordine (un endomorfism $\mathcal{A}$ se numeşte nilpotent de indice p dacă $\mathcal{A}^p = O$, unde $p = 2, 3, ...,$ iar O este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice 2 şi de rang maxim posibil se mai numeşte structură tangentă).*

În demonstraţia acestei teoreme ne este util următorul rezultat.

Lema 2.12.1. *Dacă $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ este un endomorfism, atunci există două subspaţii vectoriale $\mathcal{K}', \mathcal{K}'' \subset \mathcal{K}_n$, invariante faţă de $\mathcal{A}$, astfel încât:*

1) $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}''$;

2) *restricţia $\mathcal{A}/\mathcal{K}'$ este nilpotentă;*

3) *restricţia $\mathcal{A}/\mathcal{K}''$ este inversabilă.*

Demonstraţia lemei. Fie $N_k = N\left(\mathcal{A}^k\right)$ şi $T_k = T\left(\mathcal{A}^k\right), k \in \mathbf{N}$. Se poate arăta că N_k şi T_k sunt subspaţii invariante faţă de $\mathcal{A}$ şi că există un $p \in \mathbf{N}$, minim, astfel încât $N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_p = N_{p+1} = ...$ şi $T_1 \supset T_2 \supset ... \supset T_p = T_{p+1} = ...$ Într-adevăr, dacă $x \in T_k$ şi $y \in \mathcal{K}_n$ astfel încât $\mathcal{A}^k y = x$, atunci $\mathcal{A}x = \mathcal{A}^k (\mathcal{A}y) \in T_k$, adică $\mathcal{A}(T_k) \subset T_k$. Analog $\mathcal{A}(N_k) \subset N_{k-1} \subset N_k$.

În continuare arătăm că dacă $N_p = N_{p+1}$, rezultă $N_p = N_{p+q}$, oricare ar fi $q \in \mathbf{N}$. Într-adevăr, dacă $x \in N_{p+q}$, rezultă $\mathcal{A}^{p+q}x = 0$ sau $\mathcal{A}^{p+1}(\mathcal{A}^{q-1}x) = 0$ şi ipoteza $N_p = N_{p+1}$ implică $\mathcal{A}^p(\mathcal{A}^{q-1}x) = 0$ sau $\mathcal{A}^{p+q-1}x = 0$. Continuând procedeul obţinem $\mathcal{A}^p x = 0$, ceea ce înseamnă că $x \in N_p$; deci $N_{p+q} \subset N_p$. Aceasta împreună cu $N_p \subset N_{p+q}$, implică $N_p = N_{p+q}$. Analog se dovedeşte pentru T_p. Rezultă $\mathcal{K}' = N_p$ şi $\mathcal{K}'' = T_p$. Arătăm că $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}''$. Deoarece $\dim \mathcal{K}_n = \dim N_p + \dim T_p$ (a se vedea faptul că: $\dim N(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{X} - \dim T(\mathcal{A})$) rămâne să dovedim că $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x \in \mathcal{K}' \cap \mathcal{K}''$, rezultă $x \in \mathcal{K}'$ şi $x \in \mathcal{K}''$, adică $\mathcal{A}^p x = 0$ şi $x = \mathcal{A}^p y$; deci avem că $\mathcal{A}^{2p} y = 0$ şi cum $N_{2p} = N_{p+p} = N_p$, rezultă că $\mathcal{A}^p y = 0$ ceea ce implică $x = 0$.

Dovedim în continuare că $\mathcal{A}/\mathcal{K}'$ este nilpotent de indice p, iar $\mathcal{A}/\mathcal{K}''$ este inversabil. Deoarece $\mathcal{A}^p(N_p) = \{0\}$ rezultă $\mathcal{A}/\mathcal{K}'$ este nilpotent de indice p. Apartenenţa $x \in \mathcal{K}''$ dă $x = \mathcal{A}^p y$, deoarece $\mathcal{K}'' = T_p$. Relaţia $\mathcal{A}x = 0$ implică $\mathcal{A}(\mathcal{A}^p y) = 0$ sau $\mathcal{A}^{p+1} y = 0$, adică $\mathcal{A}^p y = 0$ şi deci $x = 0$. Rezultă $N(\mathcal{A}/\mathcal{K}'') = \{0\}$, adică $\mathcal{A}/\mathcal{K}''$ este inversabil (prin modul de definire $\mathcal{A}/\mathcal{K}''$ este surjectiv şi rămâne de arătat că $\mathcal{A}/\mathcal{K}''$ este injectiv, ceea ce este echivalent cu $N(\mathcal{A}/\mathcal{K}'') = \{0\}$). ■

Demonstraţia teoremei 2.12.3. Pentru $j \in \{1, 2, ..., p\}$ fixat, considerăm endomorfismele $\mathcal{G}_j = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ şi aplicând lema precedentă, se obţin subspaţiile $\mathcal{K}_j$ şi $\mathcal{W}_j$ astfel încât $\mathcal{G}_j/\mathcal{K}_j$ este un endomorfism nilpotent, iar

$\mathcal{G}_j/\mathcal{W}_j$ este nesingular. Deoarece $\mathcal{K}_j$ este invariant faţă de $\mathcal{G}_j$, el este invariant şi faţă de endomorfismul $\mathcal{G}_j+\lambda_j\mathcal{E} = \mathcal{A}$. Fie $\mathcal{A}/\mathcal{K}_j$ şi $\mathcal{A}/\mathcal{W}_j$ restricţiile lui $\mathcal{A}$ la subspaţiile $\mathcal{K}_j$ şi $\mathcal{W}_j$; deci unica valoare proprie a lui $\mathcal{A}/\mathcal{K}_j$ este λ_j care nu este valoare proprie şi pentru $\mathcal{A}/\mathcal{W}_j$ (deoarece $\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E}$ este nesingular pe $\mathcal{K}_j$, iar $\det(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E}) = \det(\mathcal{A}/\mathcal{K}_j-\lambda_j\mathcal{E}_1)\det(\mathcal{A}/\mathcal{W}_j-\lambda_j\mathcal{E}_2)$). Rezultă $\dim\mathcal{K}_j = m_j$ şi $\mathcal{K}_j\cap\mathcal{K}_h = \{0\}$, pentru $j\neq h$, astfel încât $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2\oplus...\oplus\mathcal{K}_p$ (ştim prin ipoteză că $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k = n$). În plus, din $\mathcal{A} = \mathcal{G}_j + \lambda_j\mathcal{E}$ rezultă $\mathcal{A}/\mathcal{K}_j = \mathcal{G}_j/\mathcal{K}_j + \lambda_j\mathcal{E}_{m_j} = \mathcal{N}_j + \lambda_j\mathcal{E}_{m_j}$, cu $\mathcal{N}_j$ nilpotent, deoarece $\mathcal{G}_j/\mathcal{K}_j$ este nilpotent prin construcţie. ■

Teorema Jordan.

Fie $\mathcal{K}_n$ un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul $\mathbf{K}$ *(*$\mathbf{R}$ *sau* $\mathbf{C}$*). Dacă endomorfismul $\mathcal{A}:\mathcal{K}_n\to\mathcal{K}_n$ are valori proprii (în* $\mathbf{K}$*) şi dacă suma multiplicităţilor acestor valori proprii este n, atunci există o bază în $\mathcal{K}_n$ faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ are forma Jordan.*

Demonstraţie. Fie λ_j , $j = 1,2,...,p$, valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ (în $\mathbf{K}$) de multiplicităţi m_j , $j = 1,2,...,p$, $\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$. Construim subspaţiile $\mathcal{K}_j = N(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E})^{m_j}$, $j = 1,2,...,p$. Conform teoremei anterioare avem $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2\oplus...\oplus\mathcal{K}_p$.

Notăm $\mathcal{N}_j = \mathcal{A}/\mathcal{K}_j - \lambda_j\mathcal{E}_{m_j}$ endomorfismele nilpotente $\mathcal{N}_j$ de indice h_j. Admitem că $h_j = m_j$, $j = 1,2,...,p$ (cazul $h_j < m_j$ se tratează analog). Construim mulţimea de vectori $\mathcal{S}^{m_j} = \left\{f_1^j, f_2^j, ..., f_{m_j}^j\right\}$ din $\mathcal{K}_j$, astfel încât $f_1^j = \mathcal{N}_j^{m_j-1}x$, $f_2^j = \mathcal{N}_j^{m_j-2}x, ..., f_{m_j-1}^j = \mathcal{N}_jx$, $f_{m_j}^j = x$, unde $x\in\mathcal{K}_j$. Din definiţia lui $\mathcal{N}_j$ şi a mulţimii $\mathcal{S}^{m_j}$ avem

$$\mathcal{N}_jf_1^j = 0, \mathcal{N}_jf_2^j = f_1^j, ..., \mathcal{N}_jf_{m_j}^j = f_{m_j-1}^j, \tag{2.12.1}$$

deoarece $\mathcal{N}_j$ este prin construcţie un endomorfism nilpotent de indice $h_j = m_j$. Având în vedere definirea lui $\mathcal{N}_j$, egalităţile (2.12.1) devin

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}/\mathcal{K}_j\left(f_1^j\right) = \lambda_jf_1^j, \\ \mathcal{A}/\mathcal{K}_j\left(f_2^j\right) = f_1^j + \lambda_jf_2^j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}/\mathcal{K}_j\left(f_{m_j}^j\right) = f_{m_j-1}^j + \lambda_jf_{m_j}^j. \end{array} \tag{2.12.2}$$

Dovedim în continuare că vectorii mulţimii $\mathcal{S}^{m_j}$ sunt liniar independenţi. Pentru aceasta, fie ecuaţia $\sum\limits_{i=1}^{m_j} k_if_i^j = 0$, $k_i\in\mathbf{K}$ şi aplicăm endomorfismul

$\mathcal{N}_j$, succesiv de $m_j - 1$ ori. Obţinem $\mathcal{N}_j\left(\sum\limits_{i=1}^{m_j} k_i f_i^j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m_j} k_i \mathcal{N} f_i^j = 0$, sau dacă ţinem cont de egalităţile (2.12.1), $k_2 f_1^j + k_3 f_2^j + ... + k_{m_j} f_{m_j-1}^j = 0$. Aplicând încă o dată $\mathcal{N}_j$ şi folosind egalităţile (2.12.1) obţinem că $k_3 f_1^j + k_4 f_2^j + ... + k_{m_j} f_{m_j-2}^j = 0$. Prin aplicarea succesivă a lui $\mathcal{N}_j$ de $m_j - 2$ ori, obţinem $k_{m_j-1} f_1^j + k_{m_j} f_2^j = 0$. Aplicând $\mathcal{N}_j$ din nou (deci în total de $m_j - 1$ ori) avem $k_{m_j} f_1^j = 0$. Deoarece $f_1^j \neq 0$, deducem $k_{m_j} = 0$. Aceasta implică $k_{m_j-1} f_1^j = 0$ şi deci $k_{m_j-1} = 0$. Analog, din celelalte egalităţi, obţinem $k_{m_j-2} = k_{m_j-3} = ... = k_3 = k_2 = k_1 = 0$. În concluzie, vectorii mulţimii $\mathcal{S}^{m_j}$ sunt liniar independenţi. Întrucât $\dim \mathcal{K}_j = m_j$, rezultă că $\mathcal{S}^{m_j}$ este bază în $\mathcal{K}_j$; aceasta este o bază Jordan în $\mathcal{K}_j$ datorită egalităţilor (2.12.2). În raport cu această bază matricea restricţiei lui $\mathcal{A}$ la $\mathcal{K}_j$, este

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_j \times m_j}(\mathbf{K}).$$

Datorită egalităţii $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{K}_p$, mulţimea $\bigcup\limits_{j=1}^{p} \mathcal{S}^{m_j}$ este baza căutată în $\mathcal{K}_n$, numită bază Jordan faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ este de tip Jordan. ■

Concluzii. Numărul de submulţimi $\mathcal{S}^{m_j}$ din baza Jordan este egal cu numărul vectorilor proprii independenţi ai lui $\mathcal{A}$. Numărul de vectori principali care corespund unei valori proprii λ_j este egal cu $m_j - h_j$.

Presupunem $h_j \leq m_j$, unde h_j este indicele de nipotenţă al endomorfismului $\mathcal{N}_j = \mathcal{A}/\mathcal{K}_j - \lambda_j \mathcal{E}_{m_j}$. Pentru a găsi baza Jordan este necesar să se urmărească problemele următoare:

1) Fixarea unei baze în $\mathcal{K}_n$ şi explicitarea matricei A ataşată endomorfismului $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$.

2) Determinarea valorilor proprii distincte λ_j , $j = 1, 2, ..., n$, respectiv multiple de ordinul m_j, $j = 1, 2, ..., p$ prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice; pentru continuare este suficient ca $\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$.

3) Găsirea vectorilor proprii liniar independenţi corespunzători fiecărei valori proprii.

4) Calcularea numărului de celule Jordan

$$\dim \mathcal{K}^{(\lambda_j)} = \dim \mathcal{K}_n - rang\,(A - \lambda_j I) = n - r_j.$$

5) Rezolvarea sistemului

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} X = 0,$$

pentru fiecare $j = 1, 2, ..., p$. Pentru j fixat, soluţiile nenule generează subspaţiul $\mathcal{K}_j$.

În cazul matricilor de ordin relativ mic, putem ocoli unele din etapele precedente ţinând seama de observaţia că la o celulă Jordan corespunde un singur vector propriu. Pentru găsirea vectorilor din bază corespunzători celulei de ordinul p, ataşată valorii proprii λ_j , se determină soluţia generală pentru $\mathcal{A}e_j = \lambda_j\, e_j$, apoi se impun condiţii de compatibilitate şi se determină soluţii pentru

$$\mathcal{A}e_2 = e_1 + \lambda_j\, e_2, ..., \mathcal{A}e_p = e_{p-1} + \lambda_j\, e_p.$$

Dacă notăm prin C matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor din baza Jordan, atunci

$$J = C^{-1}AC.$$

2.13 Spaţiul dual al unui spaţiu vectorial dat.

Teorema 2.13.1. *Mulţimea formelor liniare definite pe $\mathcal{K}_n$ formează un spaţiu vectorial cu n-dimensiuni, notat cu $\mathcal{K}^{*n}$şi numit dualul spaţiului $\mathcal{K}_n$.*

Demonstraţia rezultă din faptul că mulţimea operatorilor liniari $\mathcal{A} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_m$, notată cu $\mathcal{L}(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_m)$ formează un spaţiu vectorial izomorf cu $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$, căci $\mathcal{K}^{*n} = \mathcal{L}(\mathcal{K}_n, \mathbf{K}_1)$are dimensiunea egală cu n şi două spaţii finit dimensionale ce au aceeaşi dimensiune sunt izomorfe.

Fie în $\mathcal{K}_n$ baza **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$; pentru operatorul liniar $L : \mathcal{K}_n \to \mathbf{K}_1$ avem $L(x) = L\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i L e_i$. Deci a da forma L revine la a da valorile ei pentru baza **B**, deci a da

$$Le_i = a_i\ ,\ i = 1, 2, ..., n \tag{2.13.1}$$

(aşa cum de altfel se întâmpla şi la operatorii liniari). Avem deci

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i. \tag{2.13.2}$$

Teorema 2.13.2. *Sistemul de forme liniare $\mathbf{B}^* = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ definite prin*

$$L_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\ ,\ i = j & (i, j = 1, 2, ..., n) \\ 0\ ,\ i \neq j \end{cases} \tag{2.13.3}$$

constituie o bază în $\mathcal{K}^{*n}$, numită baza duală a bazei B.

Demonstraţie. Dacă ar exista o combinaţie liniară de tipul $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ (în ambii membrii avem forme liniare), aplicând-o unui vector e_j din **B**, după (2.13.3) avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = 0, \text{ de unde } \lambda_j = 0, \text{ pentru } j = 1, 2, ..., n,$$

deci relaţia precedentă există numai pentru $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ egali cu zero, adică sistemul $\mathbf{B}^*$este independent. Orice formă L se poate descompune în baza $\mathbf{B}^*$:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i. \tag{2.13.4}$$

Vom arăta acum că $\alpha_i = a_i$ din formula (2.13.1). Într-adevăr, aplicând forma (2.13.4) unui vector e_j din **B** avem:

$$Le_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i \left(e_j \right),$$

sau după (2.13.1) şi (2.13.3) avem $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$. Deci putem scrie

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i, \tag{2.13.5}$$

scalarii $a_1, a_2, ..., a_n$ numindu-se coordonatele formei L în baza $\mathbf{B}^*$. Evident, $L_i x = \xi_i$, căci după formula (2.13.3) are loc: $L_i x = L_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j L_i e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \delta_{ij} = \xi_i$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Teorema 2.13.3. *Dacă în $\mathcal{K}_n$ se trece de la baza* **B** *la baza* **B'** *prin matricea A, atunci de la baza $\mathbf{B}^*$ (duala bazei* **B***) la baza* **B'**** *(duala bazei* **B'***) se trece prin matricea $\left(A^{-1}\right)^t$.*

Această teoremă poate fi vizualizată prin diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}_n & \rightarrow & \mathcal{K}^{*n} & & \\
\mathbf{B} & \rightarrow & \mathbf{B}^* & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \left(A^{-1}\right)^t \\
\mathbf{B'} & \rightarrow & \mathbf{B'}^* & &
\end{array}$$

Demonstraţie. Fie **B**= $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, **B'**= $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ cu legătura $e'_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} e_j$; fie de asemenea $\mathbf{B}^* = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$, $\mathbf{B'}^* = \{L'_1, L'_2, ..., L'_n\}$ cu $L'_h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ih} L_i$.

Conform (2.13.3) aplicată bazelor **B'** şi $\mathbf{B'}^*$ are loc: $\delta_{kh} = L'_h\left(e'_k\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ih} L_i\right) e'_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ih} L_i\left(e'_k\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ih} L_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} e_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ih} a_{kj} L_i\left(e_j\right)$, adică $\delta_{kh} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ih} a_{kj} \delta_{ji} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ih} a_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki} \alpha_{ih}$.

Trecând la scrierea matricială avem: $I = A\alpha$, de unde rezultă că $\alpha = A^{-1}$ (prin α am notat matricea de elemente α_{ij} , $i, j = 1, 2, ..., n$).

Dar matricial, trecerea de la baza $\mathbf{B}^*$ la $\mathbf{B'}^*$ se scrie $L' = \alpha^t L$, adică $L' = \left(A^{-1}\right)^t L$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Această teoremă permite să se calculeze coordonatele unei forme liniare în diverse baze.

Notăm cu $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$. Formula (2.13.2) se va reprezenta matricial $Lx = a^t X$, unde $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix}$, iar $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$.

Dacă în baza $\mathbf{B}^*$ forma L are coordonatele $a^t = (a_1 ... a_n)$, iar în baza $\mathbf{B'}^*$ are coordonatele $(a')^t = (a'_1 ... a'_n)$, atunci folosind formulele de trecere de la o bază la alta în acelaşi spaţiu vectorial avem în scrierea matricială forme liniare ca vectori din $\mathcal{K}^{*n}$:

$$a' = Aa, \text{ sau } a = A^{-1} a'.$$

În relaţiile de dualitate dintre $\mathcal{K}_n$ şi $\mathcal{K}^{*n}$ se introduc următoarele denumiri: un element x din $\mathcal{K}_n$ se numeşte vector contravariant, coordonatele sale notându-se cu indicii sus ξ^i, indicii de sus de la coordonate se numesc indici de contravarianţă; un element L din $\mathcal{K}^{*n}$ se numeşte vector covariant, coordonatele sale notându-se cu indicii a_i, deci indicii de jos de la coordonate se numesc indici de covarianţă.

Capitolul 3

Forme biliniare.Forme pătratice.

3.1 Forme biliniare.

În cele ce urmează vom studia funcţii liniare numerice de două argumente vectoriale. Spre deosebire de cazul funcţiilor liniare numerice de o variabilă, teoria funcţiilor numerice de două variabile şi în special teoria formelor biliniare, au un bogat conţinut geometric. Luând în expresia unei forme biliniare al doilea argument egal cu primul, se obţine o nouă clasă importantă de funcţii de o variabilă, neliniare-formele pătratice.

Definiţia 3.1.1. *O funcţie numerică $A(x,y)$ de două argumente vectoriale x,y dintr-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$, $A : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbf{K}$ se numeşte funcţie biliniară sau formă biliniară, dacă ea este funcţie liniară de x pentru fiecare y fixat şi funcţie liniară de y pentru fiecare x fixat.*

Altfel spus, $A(x,y)$ este o formă biliniară de x şi y dacă pentru orice $x,y,z \in \mathcal{K}$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{K}$ au loc relaţiile

$$\begin{cases} A(x+z,y) = A(x,y) + A(z,y), \\ A(\alpha x,y) = \alpha A(x,y), \\ A(x,y+z) = A(x,y) + A(x,z), \\ A(x,\alpha y) = \alpha A(x,y). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Primele două din aceste egalităţi exprimă liniaritatea funcţiei $A(x,y)$ în primul argument, iar ultimele două-liniaritatea în cel de al doilea argument.

Din definiţia formei biliniare, folosind relaţiile (3.1.1), se obţine imediat formula generală

$$A\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j A(x_i,y_j), \tag{3.1.2}$$

în care $x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_m$ sunt vectori arbitrari din spaţiul $\mathcal{K}$, iar $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ sunt orice numere din **K**.

Formele biliniare date în spaţii infinit-dimensionale se numesc funcţionale biliniare.

Exemplul 3.1.1. Dacă $L_1(x)$ şi $L_2(x)$ sunt două forme liniare, atunci $A(x,y) = L_1(x) L_2(y)$ este evident o formă biliniară de x şi y.

Exemplul 3.1.2. Într-un spaţiu vectorial n-dimensional cu o bază fixată **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un exemplu de formă biliniară îl constituie funcţia definită prin

$$A(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

unde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, sunt vectori oarecare şi a_{ik} $(i,k = 1,2,...,n)$ sunt numere fixate.

a) Forma generală a unei forme biliniare într-un spaţiu vectorial n-dimensional.

Presupunem că într-un spaţiu vectorial n-dimensional $\mathcal{K}_n$ o bază oarecare **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Notăm $A(e_i, e_k) = a_{ik}$ $(i,k = 1,2,...,n)$.

Atunci pentru orice $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, conform formulei (3.1.2), avem

$$\begin{aligned} A(x,y) &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_i \eta_k A(e_i, e_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Aşadar, în exemplul 3.1.2. a fost indicată reprezentarea cea mai generală a unei funcţii biliniare într-un spaţiu vectorial n-dimensional. Coeficienţii a_{ik} formează o matrice pătratică

$$A = A_{(\mathbf{B})} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{1 \le i,k \le n}$$

pe care o numim matricea formei biliniare $A(x,y)$ în baza **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

b) Forme biliniare simetrice.

Definiţia 3.1.2. *O formă biliniară $A(x,y)$ se numeşte simetrică dacă pentru orice vectori x şi y*

$$A(x,y) = A(y,x).$$

Afirmaţia 3.1.1. *Dacă forma biliniară $A(x,y)$ în spaţiul n-dimensional $\mathcal{K}_n$ este simetrică atunci*

$$a_{ik} = A(e_i, e_k) = A(e_k, e_i) = a_{ki} \ ;$$

aşadar, matricea $A_{(\mathbf{B})}$ a unei forme biliniare simetrice în orice bază $B=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului $\mathcal{K}_n$ coincide cu matricea transpusă $A^t_{(\mathbf{B})}$.

Are loc şi afirmaţia inversă.

Afirmaţia 3.1.2. *Dacă într-o anumită bază $\mathbf{B}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ avem $A^t_{(\mathbf{B})} = A_{(\mathbf{B})}$, atunci forma $A(x,y)$ este simetrică.*

Demonstraţie. Într-adevăr, în acest caz $A(y,x) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\eta_i\xi_k = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ki}\eta_i\xi_k = \sum\limits_{k,i=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k = A(x,y)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

În particular, se obţine următorul rezultat.

Afirmaţia 3.1.3. *Dacă matricea unei forme biliniare $A(x,y)$, calculată într-o anumită bază, coincide cu transpusa ei, atunci în orice altă bază a spaţiului $\mathcal{K}_n$ matricea acestei forme coincide de asemenea cu transpusa.*

Reamintim că o matrice pătratică care coincide cu transpusa sa se numeşte matrice simetrică.

c) Transformarea matricii unei forme biliniare prin trecerea la o nouă bază.

Prin trecerea la o nouă bază, matricea formei biliniare se modifică şi vom indica în ce mod. Fie $A_{(\mathbf{B})} = (a_{ji})_{1\le j,i\le n}$ matricea unei forme biliniare $A(x,y)$ într-o bază $\mathbf{B}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $A_{(\mathbf{B'})} = (b_{ik})_{1\le i,k\le n}$ matricea aceleiaşi forme în baza $\mathbf{B'}=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ $(i,j,k = 1,2,...,n)$ şi presupunem că formulele de trecere de la o bază la alta au forma

$$f_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} e_j \quad (i = 1,2,...,n)$$

cu matricea de trecere $P = \left(p_j^{(i)}\right)_{1\le i,j\le n}$. În acest caz

$$b_{ik} = A(f_i, f_k) = A\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} e_j, \sum_{l=1}^{n} p_l^{(k)} e_l\right) =$$
$$= \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} A(e_j, e_l) = \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} a_{jl}.$$

Formula obţinută se scrie

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(p_i^{(j)}\right)^t a_{jl} p_l^{(k)}, \tag{3.1.4}$$

unde $\left(p_i^{(j)}\right)^t = p_j^{(i)}$ este elementul matricii P^t, transpusa lui P (pentru a determina elementul în forma (3.1.4) pornim de la $b_{ik} = \sum\limits_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} a_{jl} = \sum\limits_{l=1}^{n} p_l^{(k)} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl} \right)$, notăm $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl} = c_{il}$; în aceste condiţii expresia lui b_{ik} este dată de $b_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n} p_l^{(k)} c_{il} = \sum\limits_{l=1}^{n} c_{il} \left(p_k^{(l)}\right)^t = \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(i)} a_{jl} \left(p_k^{(l)}\right)^t = \sum\limits_{j,l=1}^{n} \left(p_i^{(j)}\right)^t a_{jl} p_l^{(k)}$).

Aşadar formula (3.1.4) se scrie matricial astfel

$$A_{(\mathbf{B'})} = P^t A_{(\mathbf{B})} P. \tag{3.1.5}$$

(b_{ik} scris sub formă matricială (3.1.4) asigură îndeplinirea condiţiei pentru produsul matricilor).

Observaţia 3.1.1. Deoarece matricile P şi P^t sunt nesingulare şi conform teoremelor ce se referă la rangul produsului a două matrici (a se vedea teoremele 2.7.2.-3. şi corolarul 2.7.1.), rangul matricii $A_{(\mathbf{B'})}$ este egal cu rangul matricii $A_{(\mathbf{B})}$; aşadar, rangul matricii unei forme biliniare nu depinde de alegerea bazei. De aceea are sens noţiunea de rang al unei forme biliniare, definit ca rangul matricii acestei forme în oricare din bazele spaţiului vectorial $\mathcal{K}$.

Dacă forma biliniară $A(x, y)$ are rangul n, egal cu dimensiunea spaţiului $\mathcal{K}_n$, atunci acea formă se numeşte nesingulară sau nedegenerată.

Teorema 3.1.1. *Fie $A(x, y)$ o formă nesingulară. Pentru orice vector $x_0 \neq 0$ există un vector $y_0 \in \mathcal{K}_n$ pentru care $A(x_0, y_0) \neq 0$.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, adică $A(x_0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathcal{K}_n$. Construim o bază $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ în spaţiul $\mathcal{K}_n$ astfel încât $e_1 = x_0$. Atunci în matricea formei $A(x, y)$ în această bază vom avea $a_{1m} = A(e_1, e_m) = A(x_0, e_m) = 0$, pentru orice $m = 1, 2, ..., n$, adică prima linie a matricii respective are toate elementele nule. În acest caz, rangul matricii este strict mai mic decât n, ceea ce contrazice presupunerea că forma este nedegenerată. Afirmaţia este astfel dovedită. ■

Observaţia 3.1.2. Forma $A(x, y)$ nesingulară pentru întreg spaţiul $\mathcal{K}$ poate să devină singulară pentru un subspaţiu $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. Astfel, în spaţiul $\mathcal{R}_2$, unde $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$, forma

$$A(x, y) = \xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2$$

este nesingulară; totuşi pe subspaţiul $\mathcal{R}_2' \subset \mathcal{R}_2$ definit de prima bisectoare unde $\xi_1 = \xi_2$ (şi $\eta_1 = \eta_2$) ea este identic nulă.

Observaţia 3.1.3. Pentru determinanţii matricilor considerate se obţine, aplicând teorema relativ la determinantul unui produs de matrici, relaţia

$$\det A_{(\mathbf{B'})} = \det A_{(\mathbf{B})}.\left(\det P\right)^2. \tag{3.1.6}$$

d) Forme pătratice.

Definiţia 3.1.3. *Prin formă pătratică într-un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ se înţelege orice funcţie $A(x,y)$ de un argument vectorial $x \in \mathcal{K}$, care se obţine dintr-o formă biliniară oarecare $A(x,y)$, înlocuind y cu x.*

Într-un spaţiu vectorial n-dimensional $\mathcal{K}_n$ cu o baza $\mathbf{B}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, orice formă pătratică se scrie, conform (3.1.3), în modul următor:

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{3.1.7}$$

unde $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x relativ la baza $\mathbf{B}$.

Afirmaţia 3.1.4. *Dacă este dată o funcţie $A(x,x)$ de vector x, definită în baza $\mathbf{B}$ prin formula (3.1.7), atunci această funcţie reprezintă o formă pătratică de vector x.*

Demonstraţie. Într-adevăr, se poate introduce forma biliniară

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k,$$

unde $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ sunt coordonatele vectorului y relativ la baza $\mathbf{B}$; atunci este evident că forma pătratică $B(x,x)$ coincide cu funcţia $A(x,x)$. ■

Observaţia 3.1.4. În suma dublă (3.1.7) se pot reduce unii termeni asemenea; pentru $i \neq k$ avem

$$a_{ik}\xi_i\xi_k + a_{ki}\xi_k\xi_i = (a_{ik} + a_{ki})\,\xi_i\xi_k = b_{ik}\xi_i\xi_k,$$

unde

$$b_{ik} = a_{ik} + a_{ki}.$$

Pentru $i = k$ punem $b_{ii} = a_{ii}$. Atunci suma dublă se poate scrie cu mai puţini termeni

$$A(x,x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i\leq k} b_{ik}\xi_i\xi_k.$$

De aici rezultă că două forme biliniare distincte $A(x,y) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$ şi $C(x,y) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_{ik}\xi_i\eta_k$ pot coduce, prin înlocuirea lui y cu x, la una şi aceeaşi formă pătratică; este suficient, pentru aceasta, să aibă loc relaţiile $a_{ik}+a_{ki} = c_{ik} + c_{ki}$ pentru orice i şi k.

Aşadar, în general, pentru o formă pătratică dată, pot exista mai multe forme biliniare generând forma pătratică considerată.

Afirmaţia 3.1.5. *Există un caz important în care forma biliniară poate fi determinată cunoscând forma pătratică asociată: anume, cazul când forma biliniară este simetrică.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $a_{ik} = a_{ki}$, atunci din relaţiile $a_{ik} + a_{ki} = b_{ik}$ (pentru $i \neq k$) coeficienţii a_{ik} sunt bine determinaţi

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{b_{ik}}{2} \tag{3.1.8}$$

şi pentru $i = k$

$$a_{ii} = b_{ii},$$

şi odată cu coeficienţii a_{ik}, este bine determinată întreaga formă biliniară. Această afirmaţie poate fi demonstrată şi fără a utiliza coordonate; anume, prin definiţia unei forme biliniare, avem

$$A(x+y, x+y) = A(x,x) + A(x,y) + A(y,x) + A(y,y)$$

şi în ipoteza de simetrie

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \tfrac{1}{2}\left[A(x,y) + A(y,x)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[A(x+y,x+y) - A(x,x) - A(y,y)\right]; \end{aligned}$$

aşadar, valoarea formei biliniare $A(x,y)$ este bine determinată, pentru orice pereche de vectori x, y, cunoscând valorile formei pătratice asociate ei pe vectorii x, y şi $x + y$. ■

Afirmaţia 3.1.6. *Pe de altă parte, pentru a obţine din formele biliniare toate formele pătratice posibile, este suficient să ne restrângem la forme biliniare simetrice.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $A(x,y)$ este o formă biliniară oarecare, atunci

$$A_1(x,y) = \frac{1}{2}\left[A(x,y) + A(y,x)\right]$$

este o formă biliniară simetrică şi

$$A_1(x,x) = \frac{1}{2}\left[A(x,x) + A(x,x)\right] = A(x,x),$$

adică formele pătratice $A_1(x,x)$ şi $A(x,x)$, definite de A_1 şi A, coincid. ■

Observaţia 3.1.5. Conform acestor consideraţii, în utilizarea formelor biliniare pentru studiul formelor pătratice este suficient să ne mărginim la forme biliniare simetrice şi la matrici simetrice corespunzătoare $(a_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$, $a_{jk}=a_{kj}$.

Definiţia 3.1.4. *O matrice simetrică $A=(a_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ a unei forme biliniare simetrice $A(x,y)$ corespunzând unei forme pătratice $A(x,x)$ se numeşte matricea acelei forme pătratice.*

Observaţia 3.1.6. La schimbarea bazei, matricea A a unei forme pătratice $A(x,x)$ coincide cu matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare $A(x,y)$ şi se schimbă ca aceasta din urmă:

$$A_{(\mathbf{B'})}=P^tA_{(\mathbf{B})}P,$$

unde P este matricea de trecere de la baza **B** la baza **B'**.

Observaţia 3.1.7. Rangul matricii unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei. De aceea se poate vorbi despre rangul formei pătratice $A(x,x)$, subînţelegând prin aceasta rangul matricii acestei forme în orice bază a spaţiului $\mathcal{K}_n$. Orice formă pătratică de rang n, egal cu dimensiunea spaţiului, se numeşte nesingulară.

3.2 Forma canonică a unei forme pătratice.

Considerăm o formă pătratică oarecare $A(x,x)$ într-un spaţiu vectorial n-dimensional.

Teorema 3.2.1. *În spaţiul $\mathcal{K}_n$ există o bază* **B'**$=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ *în care pentru orice vector $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_kf_k$ valoarea formei pătratice $A(x,x)$ se calculează după formula*

$$A(x,x)=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+...+\lambda_n\eta_n^2, \tag{3.2.1}$$

unde $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sunt numere fixate.

Orice bază care are această proprietate se va numi bază canonică a lui $A(x,x)$; în particular, numerele $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ vor fi numite coeficienţii canonici ai formei $A(x,x)$.

Demonstraţie. Fie **B**$=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o bază a spaţiului $\mathcal{K}_n$; dacă $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_ke_k$, atunci forma $A(x,x)$ se reprezintă astfel

$$A(x,x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\leq k}^{n}b_{ik}\xi_i\xi_k. \tag{3.2.2}$$

Afirmaţia făcută va fi demonstrată dacă se pot scrie formulele

$$\begin{cases} \eta_1 = p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + ... + p_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 = p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + ... + p_{2n}\xi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = p_{n1}\xi_1 + p_{n2}\xi_2 + ... + p_{nn}\xi_n, \end{cases} \tag{3.2.2'}$$

(acest sistem se obţine din egalarea componentelor lui x scris în baza **B** şi respectiv **B'** anume $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k f_k$ şi cunoscând legătura între vectorii celor două baze $e_k = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ik} f_i$, aşadar $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ik} f_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k p_{ik} \right) f_i$ şi deci $\eta_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k p_{ik}$, pentru $i = 1, 2, ..., n$) cu matricea de trecere $P = (p_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$ nesingulară şi astfel încât exprimând coordonatele $\{\xi\}$ în formula (3.2.2) prin mărimile $\{\eta\}$, formula (3.2.2) se transformă în (3.2.1). Demonstraţia se va face prin inducţie după numărul coordonatelor care intră efectiv în formula (3.2.2) (adică cu coeficienţii diferiţi de zero).

Presupunem că orice formă care conţine $m-1$ coordonate (de exemplu $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-1}$) poate fi redusă la forma canonică (3.2.1) (cu $n = m-1$) printr-o transformare (3.2.2'), de asemenea pentru $n = m-1$. Dacă în formula (3.2.2) intră efectiv numai o coordonată, de exemplu ξ_1, adică formula (3.2.2) se scrie $A(x,x) = b_{11}\xi_1^2$, atunci această presupunere se îndeplineşte evident (căci se poate lua $p_{11} \neq 0$ arbitrar). Considerăm acum o formă (3.2.2), conţinând efectiv m coordonate $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$. Admitem mai întâi că printre numerele $b_{11}, b_{22}, ..., b_{mm}$ există un număr diferit de zero; presupunem de exemplu că $b_{mm} \neq 0$. Separăm în forma (3.2.2) grupul de termeni care conţine coordonata ξ_m; acest grup se scrie

$$\begin{aligned} &b_{1m}\xi_1\xi_m + b_{2m}\xi_2\xi_m + ... + b_{m-1m}\xi_{m-1}\xi_m + b_{mm}\xi_m^2 = \\ &= b_{mm}\left(\tfrac{b_{1m}}{2b_{mm}}\xi_1 + \tfrac{b_{2m}}{2b_{mm}}\xi_2 + ... + \tfrac{b_{m-1m}}{2b_{mm}}\xi_{m-1} + \xi_m \right)^2 + A_1(x,x), \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

unde prin $A_1(x,x)$ se notează forma pătratică depinzând numai de mărimile $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-1}$. Considerăm următoarea transformare de coordonate:

$$\begin{cases} \tau_1 = \xi_1, \\ \tau_2 = \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tau_{m-1} = \xi_{m-1}, \\ \tau_m = \frac{b_{1m}}{2b_{mm}}\xi_1 + \frac{b_{2m}}{2b_{mm}}\xi_2 + ... + \frac{b_{m-1m}}{2b_{mm}}\xi_{m-1} + \xi_m. \end{cases}$$

Matricea acestei transformări este

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \frac{b_{1m}}{2b_{mm}} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \frac{b_{2m}}{2b_{mm}} \\ ... & ... & ... & ... & ...... \\ 0 & 0 & ... & 1 & \frac{b_{m-1m}}{2b_{mm}} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea M este nesingulară (determinantul ei fiind egal cu 1). În noile coordonate, forma $A(x,x)$ se scrie în mod evident astfel

$$A(x,x)=B(x,x)+b_{mm}\tau_m^2,$$

unde forma pătratică $B(x,x)$ depinde numai de mărimile $\tau_1,\tau_2,...,\tau_{m-1}$. În virtutea ipotezei de inducţie există o nouă transformare

$$\begin{cases} \eta_1=p_{11}\tau_1+p_{12}\tau_2+...+p_{1m-1}\tau_{m-1}, \\ \eta_2=p_{21}\tau_1+p_{22}\tau_2+...+p_{2m-1}\tau_{m-1}, \\ .... \\ \eta_{m-1}=p_{m-11}\tau_1+p_{m-12}\tau_2+...+p_{m-1m-1}\tau_{m-1}, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

cu matricea nesingulară $P=(p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ care reduce forma $B(x,x)$ la forma canonică

$$B(x,x)=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+...+\lambda_{m-1}\eta_{m-1}^2.$$

Dacă adăugăm la egalităţile (3.2.4) egalitatea $\eta_m=\tau_m$, atunci se obţine o transformare nesingulară a coordonatelor $\tau_1,\tau_2,...,\tau_m$ în raport cu coordonatele $\eta_1,\eta_2,...,\eta_m$ după care forma $A(x,x)$ se scrie astfel

$$A(x,x)=B(x,x)+b_{mm}\tau_m^2=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+...+\lambda_{m-1}\eta_{m-1}^2+b_{mm}\eta_m^2.$$

Trecerea directă de la coordonatele $\{\xi\}$ la coordonatele $\{\eta\}$ se realizează cu ajutorul matricii egale cu produsul matricilor de trecere de la coordonatele $\{\tau\}$ la coordonatele$\{\eta\}$ cu matricea de trecere de la coordonatele $\{\xi\}$ la coordonatele $\{\tau\}$. Deoarece ambele matrici sunt $m\times m$-matrici nesingulare, atunci şi $m\times m$-matricea produs este de asemenea nesingulară.

Rămâne de considerat cazul când în forma $A(x,x)$ cu m coordonate $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$ toate numerele $a_{11},a_{22},...,a_{mm}$ sunt egale cu zero. Considerăm unul din termenii $a_{ij}\xi_i\xi_j$ cu coeficientul a_{ij} diferit de zero; de exemplu, presupunem că $a_{12}\neq 0$. Efectuăm următoarea transformare de coordonate (pentru comoditate scriem trecerea de la noile coordonate la cele vechi):

$$\begin{cases} \xi_1=\xi_1'+\xi_2', \\ \xi_2=\xi_1'-\xi_2', \\ .... \\ \xi_j=\xi_j' \quad (j=3,...,m). \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Determinantul transformării (3.2.5) este egal cu (-2), deci această transformare este din nou nesingulară. Termenul $a_{12}\xi_1\xi_2$ se transformă în modul următor

$$a_{12}\xi_1\xi_2 = a_{12}\xi_1'^2 - a_{12}\xi_2'^2;$$

de aceea în forma transformată apar din nou două pătrate ale coordonatelor cu coeficienţi nenuli (este evident că aceste pătrate nu pot fi asemenea cu ceilalţi termeni, deoarece aceştia conţin coordonatele ξ_i' cu $i > 2$). Astfel, în coordonatele ξ_i' formei (3.2.2) i se poate aplica metoda inductivă anterioară.

Aşadar, forma (3.2.2) cu orice număr $m \leq n$ de coordonate efective ξ_j, se reduce la forma (3.2.1) prin transformarea (3.2.2'), înlocuind n cu m. Adăugând eventual egalităţile $\eta_{m+1} = \xi_{m+1}, ..., \eta_n = \xi_n$, putem completa sistemul (3.2.2') până la sistemul cerut din n ecuaţii cu matricea nesingulară $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ şi demonstraţia se încheie. ■

Ideea demonstraţiei-separarea succesivă de pătrate-poate fi aplicată şi pentru reducerea efectivă a unei forme pătratice dată, la forma canonică.

Observaţia 3.2.1. Nici baza canonică, nici forma canonică a unei forme pătratice nu sunt unic determinate. De exemplu, orice permutare de vectori ai unei baze canonice conduce la o altă bază canonică. În cele ce urmează vom arăta între altele că pentru o formă pătratică dată se poate construi o bază canonică luând primul vector al acestei baze în mod arbitrar (cu unele excepţii).

Apoi dacă forma este scrisă canonic

$$A(x,x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + ... + \lambda_n\eta_n^2$$

$(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ fiind coordonatele vectorului $x)$, atunci transformarea coordonatelor

$$\eta_1 = \alpha_1\tau_1, \eta_2 = \alpha_2\tau_2, ..., \eta_n = \alpha_n\tau_n$$

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ fiind numere fixate, toate nenule, iar $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ noile coordonate) reduce forma $A(x,x)$ la o nouă formă, de asemenea canonică, dar cu alţi coeficienţi

$$A(x,x) = \left(\lambda_1\alpha_1^2\right)\tau_1^2 + \left(\lambda_2\alpha_2^2\right)\tau_2^2 + ... + \left(\lambda_n\alpha_n^2\right)\tau_n^2.$$

De aceea se pune problema descrierii tuturor formelor canonice care pot fi reduse la o formă pătratică dată. Această problemă va fi precizată restrângând definiţia formei canonice sau restrângând clasa transformărilor admisibile de coordonate.

Observaţia 3.2.2. În general, numărul coeficienţilor canonici nenuli este egal cu rangul matricii formei pătratice în baza canonică corespunzătoare. Deoarece rangul matricii unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei, numărul coeficienţilor canonici nenuli ai unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei canonice. Acest număr coincide cu rangul formei pătratice (a se vedea teoremele 2.7.2.-3. şi corolarul 2.7.1.). Cunoscând matricea unei forme pătratice $A(x,x)$ într-o bază $\mathbf{B}$, putem prevedea numărul coeficienţilor canonici nenuli ai acestei forme; acest număr este chiar rangul formei $A(x,x)$, care se poate calcula ca rangul formei $A(x,x)$ în baza $\mathbf{B}$. În particular, pentru o formă pătratică nedegenerată (nesingulară) în orice bază canonică toţi coeficienţii ei canonici sunt diferiţi de zero.

a) Bază canonică a unei forme biliniare.

Definiţia 3.2.1. *Un vector x_1 se numeşte conjugat cu vectorul y_1 relativ la o formă biliniară $A(x,y)$ dacă:*

$$A(x_1, y_1) = 0.$$

Condiţia de conjugare a vectorilor x_1 şi y_1 se scrie

$$A(x_1, y_1) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\eta_k = 0,$$

unde $(a_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$este matricea formei biliniare $A(x,y)$ reprezentată într-o bază $\mathbf{B}$= $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, iar $x_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ şi $y_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$.

Teorema 3.2.2. *Dacă vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt conjugaţi cu vectorul y_1 atunci orice vector al subspaţiului $\mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_k)$-acoperirea liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ este de asemenea conjugat cu y_1.*

Demonstraţie. Într-adevăr, conform proprietăţilor unei forme biliniare,

$$A(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k, y_1) = \alpha_1 A(x_1, y_1) + ... + \alpha_k A(x_k, y_1) = 0.$$

■

Dacă un vector y_1 este conjugat cu orice vector al unui subspaţiu $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, atunci vom numi acest vector conjugat subspaţiului $\mathcal{K}'$. Mulţimea $\mathcal{K}''$ a tuturor vectorilor $y_1 \in \mathcal{K}$ conjugaţi subspaţiului $\mathcal{K}'$ este evident un subspaţiu al lui $\mathcal{K}$. Acest subspaţiu $\mathcal{K}''$ va fi numit conjugatul lui $\mathcal{K}'$.

Definiţia 3.2.2. *O bază $\mathbf{B}$= $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului $\mathcal{K}$ se numeşte bază canonică pentru forma biliniară $A(x,y)$ dacă vectorii bazei sunt conjugaţi doi câte doi: $A(e_i, e_j) = 0$ pentru $i \neq j$.*

Matricea unei forme biliniare într-o bază canonică are forma diagonală, deoarece $a_{ij} = A(e_i, e_j) = 0$ pentru $i \neq j$. O matrice diagonală coincide cu transpusa ei, de aceea orice formă biliniară având bază canonică trebuie să fie simetrică.

Are loc următorul rezultat.

Teorema 3.2.3. *Orice formă biliniară simetrică $A(x,y)$ admite bază canonică.*

Demonstraţie. Considerăm forma pătratică $A(x,x)$ care corespunde unei forme biliniare $A(x,y)$. Este cunoscut că în spaţiul $\mathcal{K}$ există o bază **B**$=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ relativ la care forma pătratică $A(x,x)$ se scrie sub forma canonică

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Forma biliniară simetrică corespunzătoare $A(x,y)$ are forma canonică

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\eta_i, \tag{3.2.6}$$

unde $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i e_i$, iar $a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,...,n)$; matricea ei este aşadar diagonală. Dar aceasta înseamnă că baza **B**$=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ este canonică pentru forma $A(x,y)$. ■

Observaţia 3.2.3. Fie **B**$=\{e_1,e_2,...,e_k\}$ baza canonică a formei $A(x,y)$într-un subspaţiu k-dimensional $\mathcal{K}'\subset\mathcal{K}$. Fie $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k$ coeficienţii canonici corespunzători. Exprimăm numerele $A(x,e_i)$ prin coordonatele vectorului $x\in\mathcal{K}'$. Avem

$$\begin{aligned}&A(x,e_i)=A\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j e_j,e_i\right)=\sum_{j=1}^{k}\xi_j A(e_j,e_i)=\\&=\xi_i A(e_i,e_i)=\varepsilon_i\xi_i,\end{aligned}$$

astfel că numerele $A(x,e_i)$ determină în mod univoc coordonatele vectorului x. Dacă forma $A(x,y)$ este nesingulară în subspaţiul $\mathcal{K}'$, atunci numerele ε_i sunt diferite de zero; în acest caz, are loc şi afirmaţia inversă, anume, valorile formei $A(x,e_i)$ determină univoc coordonatele vectorului x.

b) Construirea unei baze canonice prin metoda Jacobi.

Metoda de construire a unei baze canonice prezentată anterior prezintă inconvenientul că nu oferă posibilitatea exprimării directe, în funcţie de elementele matricii $A_{(\mathbf{B'})}$ a unei forme biliniare simetrice $A(x,y)$ într-o bază **B'**$=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ a coeficienţilor λ_i şi coordonatele vectorilor bazei canonice. Metoda Jacobi expusă în cele ce urmează ne va permite să determinăm aceşti coeficienţi şi coordonatele vectorilor bazei canonice căutate. Pentru aceasta impunem matricii $A_{(\mathbf{B'})}$ următoarea condiţie suplimentară: toţi minorii din colţurile din stânga sus ai matricii $A_{(\mathbf{B'})}$ până la ordinul $n-1$ inclusiv, adică

$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n-1} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n-11} & a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$ să fie diferiţi de zero.

Vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ sunt construiţi după formulele

$$\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = \alpha_1^{(1)} f_1 + f_2, \\ e_3 = \alpha_1^{(2)} f_1 + \alpha_2^{(2)} f_2 + f_3, \\ .... \\ e_{k+1} = \alpha_1^{(k)} f_1 + \alpha_2^{(k)} f_2 + \alpha_3^{(k)} f_3 + ... + \alpha_k^{(k)} f_k + f_{k+1}, \\ .... \\ e_n = \alpha_1^{(n-1)} f_1 + \alpha_2^{(n-1)} f_2 + \alpha_3^{(n-1)} f_3 + ... + \alpha_{n-1}^{(n-1)} f_{n-1} + f_n, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

unde coeficienţii $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k; k = 1, 2, ..., n-1)$ sunt deocamdată nedeterminaţi. Observăm mai întâu că trecerea de la vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$ la vectorii $e_1, e_2, ..., e_k$ se efectuează cu ajutorul matricii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(1)} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & ... & .... & ... \\ \alpha_1^{(k-1)} & \alpha_2^{(k-1)} & \alpha_3^{(k-1)} & ... & \alpha_{k-1}^{(k-1)} & 1 \end{pmatrix},$$

având determinantul egal cu 1; de aceea pentru $k = 1, 2, ..., n$, vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$ pot fi exprimaţi liniar prin $e_1, e_2, ..., e_k$ şi prin urmare acoperirea liniară $\mathcal{L}(f_1, f_2, ..., f_k)$ coincide cu acoperirea liniară $\mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$.

Impunem coeficienţilor $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ condiţia ca vectorul e_{k+1} să fie conjugat subspaţiului $\mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$. Pentru aceasta este necesar şi suficient să aibă loc egalităţile

$$A(e_{k+1}, f_1) = 0, A(e_{k+1}, f_2) = 0, ..., A(e_{k+1}, f_k) = 0. \tag{3.2.8}$$

Într-adevăr, din condiţiile (3.2.8) rezultă că vectorul e_{k+1} este conjugat cu acoperirea liniară a vectorilor $f_1, f_2, ..., f_k$ care coincide conform celor arătate cu acoperirea liniară a vectorilor $e_1, e_2, ..., e_k$. Invers, dacă vectorul e_{k+1} este conjugat spaţiului $\mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$, atunci el este conjugat fiecărui vector al acestui subspaţiu şi în particular cu vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$, de aceea se îndeplinesc egalităţile (3.2.8). Înlocuind în (3.2.8) expresia (3.2.7) a lui e_{k+1} şi folosind definiţia formei biliniare, se obţine sistemul liniar de ecuaţii relativ la mărimile $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$:

$$\begin{cases} A\left(e_{k+1}, f_1\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(f_1, f_1\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(f_2, f_1\right) + ...+ \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(f_k, f_1\right) + A\left(f_{k+1}, f_1\right) = 0, \\ A\left(e_{k+1}, f_2\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(f_1, f_2\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(f_2, f_2\right) + ...+ \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(f_k, f_2\right) + A\left(f_{k+1}, f_2\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\left(e_{k+1}, f_k\right) = \alpha_1^{(k)} A\left(f_1, f_k\right) + \alpha_2^{(k)} A\left(f_2, f_k\right) + ...+ \\ +\alpha_k^{(k)} A\left(f_k, f_k\right) + A\left(f_{k+1}, f_k\right) = 0. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Acest sistem neomogen de ecuaţii cu coeficienţii $A\left(f_i, f_j\right) = a_{ij}$, unde $i, j = 1, 2, ..., k$, are prin ipoteză determinantul diferit de zero şi prin urmare este compatibil şi determinat; aşadar se pot determina mărimile $\alpha_i^{(k)}$ şi în acelaşi timp se poate construi vectorul căutat e_{k+1}. Pentru determinarea tuturor coeficienţilor $\alpha_i^{(k)}$ şi a tuturor vectorilor e_k este necesar ca pentru fiecare k să fie rezolvat sistemul corespunzător (3.2.9), adică un sistem de $n-1$ ecuaţii liniare.

Notăm coordonatele vectorului x în baza $\mathbf{B}= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ cu $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ şi coordonatele lui y în aceeaşi bază prin $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$.

Forma biliniară $A\left(x, y\right)$ se scrie în această bază

$$A\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i. \tag{3.2.10}$$

Pentru a calcula coeficienţii λ_i vom raţiona în modul următor. Considerăm forma biliniară $A\left(x, y\right)$ restrânsă la subspaţiul $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}\left(e_1, e_2, ..., e_m\right)$, unde $m \leq n$. Forma $A\left(x, y\right)$ admite relativ la baza $f_1, f_2, ..., f_m$ a subspaţiului $\mathcal{L}_m$, matricea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix},$$

iar în baza $e_1, e_2, ..., e_m$, matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza $f_1, f_2, ..., f_m$ la baza $e_1, e_2, ..., e_m$, corespunzând formulelor de trecere (3.2.7) are determinantul egal cu 1.

În virtutea formulei $\det A_{(\mathbf{B'})} = \det A_{(\mathbf{B})} (\det P)^2$, unde P este matricea de trecere de la o bază la alta, trebuie să avem

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix},$$

sau utilizând notaţiile pentru minorii din colţul din stânga sus

$$\delta_m = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_m \quad (m = 1, 2, ..., n). \tag{3.2.11}$$

Din formulele (3.2.11) rezultă direct că

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = \delta_1 = a_{11}, \\ \lambda_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \\ \lambda_3 = \frac{\delta_3}{\delta_2}, \\ \text{.........................} \\ \lambda_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{array} \tag{3.2.12}$$

Formulele (3.2.12) permit determinarea coeficienţilor unei forme biliniare într-o bază canonică, fără a calcula baza însăşi.

Teorema 3.2.4. *Dacă un vector f nu aparţine unui subspaţiu $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ pe care forma $A(x, y)$ este nesingulară, atunci există o descompunere unică*

$$f = g + h, \tag{3.2.13}$$

unde $g \in \mathcal{K}'$, iar h este conjugat spaţiului $\mathcal{K}'$.

Demonstraţie. Considerăm cea de-a k formulă din sistemul (3.2.7), pe care o scriem astfel:

$$f_{k+1} = -\alpha_1^{(k)} f_1 - ... - \alpha_k^{(k)} f_k + e_{k+1} = g_k + e_{k+1}.$$

În această formulă vectorul g_k aparţine subspaţiului $\mathcal{L}(f_1, f_2, ..., f_k)$, iar e_{k+1} este conjugat acestui subspaţiu. Coeficienţii $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, ..., \alpha_k^{(k)}$ se determină în mod unic din sistemul (3.2.9) în ipoteza că $\det (A(f_i, f_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ sau, că forma $A(x, y)$ este nesingulară pe subspaţiul $\mathcal{L}(f_1, f_2, ..., f_k)$. Deoarece vectorul f_{k+1} a fost ales arbitrar, atunci notând $f = f_{k+1}, g = g_k, h = e_{k+1}, \mathcal{L}(f_1, f_2, ..., f_k) = \mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, teorema este complet demonstrată. ■

Observaţia 3.2.4. Notăm prin $\mathcal{K}''$ subspaţiul conjugat subspaţiului $\mathcal{K}'$ relativ la forma $A(x, y)$. Descompunerea unică de tipul (3.2.13) arată că întreg spaţiul $\mathcal{K}$ este suma directă a subspaţiilor $\mathcal{K}'$ şi $\mathcal{K}''$. Aşadar, având un subspaţiu $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ pe care forma $A(x, y)$, definită pe întreg spaţiul $\mathcal{K}$, este nesingulară, are loc o descompunere directă $\mathcal{K} = \mathcal{K}' + \mathcal{K}''$, unde subspaţiul $\mathcal{K}''$ este conjugat cu $\mathcal{K}'$ relativ la forma $A(x, y)$.

3.3 Semnul unei forme pătratice.

Faptul că în mulţimea numerelor rele există numere pozitive şi numere negative, face ca teoria formelor biliniare şi a formelor pătratice în spaţii reale să aibă unele aspecte specifice, care nu se întâlnesc în cazul unui corp oarecare de scalari. Conform teoremei privind reducerea unei forme pătratice la forma canonică, orice formă pătratică $A(x,x)$ se reduce într-o anumită bază la forma canonică

$$A(x,x) = \lambda_1\eta_1^2 + ... + \lambda_n\eta_n^2.$$

Printre numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ există atâtea numere nenule cât rangul matricii formei $A(x,x)$. Ele sunt pozitive sau negative. Numărul coeficienţilor canonici pozitivi şi numărul coeficienţilor canonici negativi nu se modifică prin schimbarea bazei canonice aşa cum rezultă din teorema următoare.

Teorema 3.3.1. (Legea inerţiei pentru forme pătratice a lui Sylvester) *Numărul coeficienţilor pozitivi şi numărul coeficienţilor negativi în forma pătratică $A(x,x)$ sunt invarianţi ai formei (adică nu depind de alegerea bazei canonice).*

Demonstraţie. Fie $A(x,x)$ o formă pătratică dată. Într-o anumită bază **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ea are forma

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k,$$

unde $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x relativ la baza **B**. Admitem că alegem două baze canonice **B'**$= \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ şi **B"**$= \{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Notăm prin $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ coordonatele vectorului x în baza **B'** şi $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ coordonatele lui x în baza **B"**. Formulele corespunzătoare de transformare a coordonatelor vor fi de forma:

$$\begin{cases} \eta_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + ... + b_{1n}\xi_n, \\ \tau_1 = c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + ... + c_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 = b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + ... + b_{2n}\xi_n, \\ \tau_2 = c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + ... + c_{2n}\xi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + ... + b_{nn}\xi_n, \\ \tau_n = c_{n1}\xi_1 + c_{n2}\xi_2 + ... + c_{nn}\xi_n. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

În baza **B'** forma $A(x,x)$ se scrie

$$A(x,x) = \alpha_1\eta_1^2 + ... + \alpha_k\eta_k^2 - \alpha_{k+1}\eta_{k+1}^2 - ... - \alpha_m\eta_m^2, \tag{3.3.2}$$

iar în baza **B”**

$$A(x,x) = \beta_1\tau_1^2 + ... + \beta_p\tau_p^2 - \beta_{p+1}\tau_{p+1}^2 - ... - \beta_q\tau_q^2. \tag{3.3.3}$$

Numerele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ se presupun pozitive. Vom arăta că $k = p, m = q$. Egalând membrii din dreapta ai egalităţilor (3.3.2) şi (3.3.3) şi trecând termenii negativi în ceilalţi membrii, rezultă

$$\begin{aligned} &\alpha_1\eta_1^2 + ... + \alpha_k\eta_k^2 + \beta_{p+1}\tau_{p+1}^2 + ... + \beta_q\tau_q^2 = \\ &= \alpha_{k+1}\eta_{k+1}^2 + ... + \alpha_m\eta_m^2 + \beta_1\tau_1^2 + ... + \beta_p\tau_p^2. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Presupunem $k < p$. Considerăm atunci vectorii x satisfăcând condiţiile

$$\begin{cases} \eta_1 = 0, \eta_2 = 0, ..., \eta_k = 0, \\ \tau_{p+1} = 0, ..., \tau_q = 0, \tau_{q+1} = 0, ..., \tau_n = 0. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Aceste condiţii sunt în număr mai mic decât n (deoarece $k < n$). Înlocuind expresiile lui $\eta_1, ..., \eta_k, \tau_{p+1}, ..., \tau_n$ prin coordonatele $\{\xi\}$ după formulele (3.3.1), obţinem un sistem de ecuaţii liniare omogene cu numărul de ecuaţii mai mic decât numărul necunoscutelor şi, prin urmare, acest sistem omogen admite o soluţie nenulă $x = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$. Pe de altă parte, orice vector x satisfăcând condiţia (3.3.5) satisface conform egalităţii (3.3.4) condiţiile

$$\tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_p = 0.$$

Vectorul pentru care $\tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_p = \tau_{p+1} = ... = \tau_n = 0$, este în mod necesar vectorul nul şi pentru el toate coordonatele $\{\xi\}$ trebuie de asemenea să fie egale cu zero. Contradicţia obţinută arată că ipoteza $k < p$ nu poate fi îndeplinită. Din rolul simetric al numerelor k şi p rezultă că nici ipoteza $p < k$ nu poate avea loc. Aşadar, $k = p$. Mai departe, considerând condiţiile

$$\begin{aligned} &\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, ..., \tau_p = 0, \\ &\eta_{k+1} = 0, ..., \eta_m = 0, \eta_{m+1} = 0, ..., \eta_n = 0, \end{aligned}$$

prin aceeaşi metodă ipotezele $m < q$ şi $q < m$ conduc la contradicţie şi se obţine în final $k = p$ şi $m = q$, adică ceea ce trebuia dovedit. ■

Observaţia 3.3.1. Teorema inerţiei demonstrată anterior pentru forme pătratice se formulează în mod direct şi pentru formele biliniare simetrice şi anume: numărul coeficienţilor canonici pozitivi şi al celor negativi în expresia $A(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\xi_i\eta_i$, a unei forme biliniare $A(x,y)$ nu depinde de alegerea bazei canonice ($x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$).

Observaţia 3.3.2. p se numeşte indicele pozitiv de inerţie, iar $(q-p)$ se numeşte indicele negativ de inerţie, iar numărul $s = p - (q-p)$ se numeşte signatura formei pătratice $A(x,x)$.

Definiţia 3.3.1. *O formă pătratică se numeşte pozitiv (negativ) definită, dacă* $A(x,x) > 0$ $(A(x,x) < 0)$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$*; forma* $A(x,x)$ *se numeşte pozitiv (negativ) semidefinită dacă* $A(x,x) \geq 0$ $(A(x,x) \leq 0)$ *pentru orice* $x \in \mathcal{K}$ *(există cel puţin un* $x_1 \in \mathcal{K}$ *astfel încât* $A(x_1,x_1) = 0$*).*

Observaţia 3.3.3. Forma $A(x,x)$ se numeşte nedefinită dacă există $x_1 \in \mathcal{K}$ astfel încât $A(x_1,x_1) > 0$ şi există $x_2 \in \mathcal{K}$ încât $A(x_2,x_2) < 0$.

După legea de inerţie, noţiunile definite anterior sunt invariante, deci independente de expresia bazei în care se exprimă forma pătratică.

Capitolul 4

Spaţii vectoriale euclidiene.

4.1 Spaţiul vectorial real.

O mare varietate de fapte din geometrie decurg din posibilitatea diverselor măsurări, în esenţă posibilitatea măsurării lungimilor segmentelor şi unghiurilor între drepte. Într-un spaţiu vectorial oarecare nu există mijloace pentru descrierea unor astfel de măsurări, ceea ce restrânge domeniul de studiu.

Pentru a extinde în mod natural metodele legate de existenţa măsurilor uzuale din geometrie la spaţii vectoriale generale, apelăm la noţiunea de produs scalar a doi vectori.

Într-un spaţiu vectorial general va fi uşor să introducem mai întâi noţiunea de produs scalar a doi vectori şi apoi să definim lungimile vectorilor şi unghiul dintre vectori pe baza acestei noţiuni.

Este util să vedem ce proprietăţi ale produsului scalar uzual pot fi utilizate pentru construirea unei mărimi similare într-un spaţiu vectorial general. Ne vom limita la cazul spaţiului real cu observaţii relativ la comportarea produsului scalar în spaţii generale.

Definiţia 4.1.1. *Un spaţiu vectorial real $\mathcal{R}$ se numeşte euclidian dacă:*

1) *există o regulă care permite să asociem oricărei perechi ordonate de vectori x, y din $\mathcal{R}$ un număr real numit produsul scalar al vectorilor x, y, notat (x, y);*

2) *sunt în plus satisfăcute următoarele condiţii:*

a) $(x, y) = (y, x)$ *(comutativitate);*

b) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ *(distributivitate);*

c) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$*, pentru orice* $\lambda \in \mathbf{R}$*;*

d) $(x, x) > 0$*, pentru* $x > 0$ *şi* $(x, x) = 0$*, pentru* $x = 0$.

Axiomele **a)-d)** se pot formula spunând că produsul scalar este o formă biliniară **b)-c)**, simetrică **a)** şi pozitiv definită **d)**. Invers, orice formă ce satisface aceste proprietăţi poate fi luată ca produs scalar în $\mathcal{R}$.

Deoarece produsul scalar al vectorilor x, y este o formă biliniară, atunci forma ei generală este

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j). \tag{4.1.1}$$

Aici $x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_m$ sunt vectori arbitrari ai spaţiului euclidian $\mathcal{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ sunt numere reale arbitrare.

Observaţia 4.1.1. În cazul spaţiului vectorial complex $\mathcal{C}$ spunem că este spaţiu unitar dacă:

1) oricărei perechi de vectori x, y din $\mathcal{C}$ i se asociază un număr complex notat (x, y); satisfăcând condiţiile:

2) a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ pentru orice $x, y \in \mathcal{C}$, iar $\overline{(y, x)}$ reprezintă conjugatul lui (x, y);

b) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathcal{C}$;

c) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$, pentru orice $x, y \in \mathcal{C}$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$;

d) $(x, x) > 0$, pentru orice $x \neq 0$; $(0, 0) = 0$.

Din axiomele **a)-c)** rezultă formula generală

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \alpha_j \overline{\beta_k} (x_j, y_k),$$

pentru orice $x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_q$ din $\mathcal{C}$ şi pentru orice numere complexe $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_p, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$.

Exemplul 4.1.1. În spaţiul $\mathcal{R}_n$ introducem produsul scalar al vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ astfel:

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + ... + \xi_n \eta_n. \tag{4.1.2}$$

Această formulă generalizează definiţia binecunoscută a expresiei produsului scalar al vectorilor din spaţiul tridimensional prin coordonatele factorilor, într-un sistem ortogonal de coordonate. Se verifică imediat îndeplinirea condiţiilor **a)-d)**.

Trebuie observat că formula (4.1.2) nu reprezintă unicul mod de definire a unui produs scalar în $\mathcal{R}_n$. Toate modurile posibile de definire a unui produs scalar (adică a unei forme biliniare simetrice pozitiv definite) în spaţiul $\mathcal{R}_n$ definesc un produs scalar.

Exemplul 4.1.2. În spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$ al funcţiilor reale continue pe segmentul $[a, b]$ se poate introduce produsul scalar al funcţiilor $x(t), y(t)$ după formula

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt. \tag{4.1.3}$$

Este uşor de arătat, prin aplicarea regulilor de bază ale integrării că sunt îndeplinite condiţiile a)-d). În cele ce urmează, vom nota spaţiul $\mathcal{R}(a,b)$ înzestrat cu produsul scalar (4.1.3), prin $\mathcal{R}_2(a,b)$.

Exemplul 4.1.3. În spaţiul n-dimensional $\mathcal{C}_n$ introducem produsul scalar al vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ după formula

$$(x,y) = \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + ... + \xi_n\overline{\eta_n}.$$

Îndeplinirea proprietăţilor a)-d) se verifică cu uşurinţă.

Exemplul 4.1.4. În spaţiul $\mathcal{C}(a,b)$ al funcţiilor continue pe segmentul $[a,b]$ cu valori complexe, definim produsul scalar al funcţiilor $x(t)$ şi $y(t)$ prin formula

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}dt.$$

Îndeplinirea axiomelor a)-d) rezultă din proprietăţile fundamentale ale integralei (şi în cazul exemplului 4.1.3. şi în cazul 4.1.4. este vorba de axiomele a)-d) din observaţia 4.1.1.).

4.2 Noţiuni metrice fundamentale.

Având definit un produs scalar, putem indica definiţia altor noţiuni metrice de bază-lungimea vectorilor şi unghiul a doi vectori.

a) Lungimea vectorilor.

Lungimea unui vector x într-un spaţiu euclidian $\mathcal{R}$ este prin definiţie numărul real pozitiv

$$|x| = \sqrt{(x,x)}. \tag{4.2.1}$$

Această definiţie rămâne valabilă şi pentru un vector x într-un spaţiu euclidian $\mathcal{C}$.

Din axioma d) rezultă că pentru orice vector x dintr-un spaţiu euclidian $\mathcal{R}$ există o lungime; pentru orice vector $x \neq 0$ lungimea este pozitivă şi vectorul nul are lungimea egală cu zero. Egalitatea

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)} = |\alpha|\,|x| \tag{4.2.2}$$

arată că mărimea absolută a unui multiplicator real poate fi scoasă factor din expresia lungimii unui vector. Acelaşi lucru rămâne valabil şi în cazul când multiplicatorul α este complex, cu menţiunea că $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = |\alpha|$.

Orice vector x de lungime 1 se numeşte normat. Orice vector nenul y poate fi normat, adică înmulţit cu un număr λ astfel încât ca rezultat să se obţină un vector normat. Într-adevăr, ecuaţia $|\lambda y| = 1$ relativ la λ are de exemplu soluţia $\lambda = \frac{1}{|y|}$.

O mulţime $F \subset \mathcal{R}$ se numeşte mărginită dacă lungimile tuturor vectorilor $x \in F$ sunt mărginite de o constantă fixată. Exemple de mulţimi mărginite sunt: bila unitate a spaţiului $\mathcal{R}$, adică mulţimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}$ cu lungimea mai mică decât 1 şi sfera unitate-mulţimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}$ având lungimea egală cu 1. În cazul spaţiului euclidian complex $\mathcal{C}$, ca exemplu de mulţime mărginită se poate da bila unitate a spaţiului $\mathcal{C}$, adică mulţimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{C}$ cu $|x| \leq 1$.

b) Unghiul dintre doi vectori.

Se numeşte unghi neorientat între doi vectori nenuli x, y acel unghi cuprins între 0^0 şi 180^0 al cărui cosinus este egal cu raportul

$$\frac{(x, y)}{|x|\,|y|}.$$

Pentru ca această definiţie să poată fi aplicată într-un spaţiu euclidian oarecare, este necesar de arătat că raportul indicat mai înainte este cuprins între -1 şi 1 pentru orice vectori nenuli x, y, adică valoarea absolută a raportului să fie cel mult egală cu 1.

Pentru a demonstra acest fapt, considerăm vectorul $\lambda x - y$, unde λ este un număr real arbitrar fixat. Conform axiomei d), pentru orice λ, avem

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \tag{4.2.3}$$

Folosind formula (4.1.1) putem scrie această inegalitate astfel

$$\lambda^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y) \geq 0. \tag{4.2.4}$$

În membrul stâng al inegalităţii (4.2.4) se află un trinom de gradul doi relativ la λ cu coeficienţi constanţi. Acest trinom nu poate avea rădăcini reale distincte, deoarece în acest caz nu ar putea avea semn constant pentru toate valorile lui λ. De aceea discriminantul $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ al acestui trinom nu poate fi pozitiv, deci

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

De aici rezultă că

$$|(x,y)| \leq |x|\,|y|\,, \tag{4.2.5}$$

ceea ce trebuia arătat. Inegalitatea (4.2.5) se numeşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz. ■

Observaţia 4.2.1. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz în cazul a doi vectori $x, y \in \mathcal{C}$ se demonstrează după aceeaşi schemă ca cea de mai înainte, dar cu o anumită precauţie în utilizarea numerelor complexe. Dacă $(x,y) = 0$, atunci inegalitatea (4.2.5) este evidentă. Pentru $(x,y) \neq 0$ observăm că $(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$ pentru orice λ complex.

Dezvoltând membrul stâng, rezultă

$$|\lambda|^2 (x,x) - \lambda (x,y) - \overline{\lambda (x,y)} + (y,y) \geq 0. \tag{4.2.6}$$

Vom considera că λ variază pe dreapta γ-simetrică faţă de axa reală a dreptei definită de origine şi de numărul complex (x,y); aşadar, $\lambda = tz_0$, unde t este real şi z_0 este număr complex de modul 1 care determină direcţia dreptei γ, $z_0 = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}$. Atunci $\lambda (x,y) = t\,|(x,y)|$ este real şi $\overline{\lambda (x,y)} = \lambda (x,y)$. Inegalitatea (4.2.6) devine

$$t^2 (x,x) - 2t\,|(x,y)| + (y,y) \geq 0. \tag{4.2.7}$$

Acum raţionând ca şi în cazul spaţiului euclidian real obţinem inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz căutată.

Dacă inegalitatea (4.2.5) se reduce la o egalitate, atunci trinomul din membrul stâng al inegalităţii (4.2.7) are o unică rădăcină reală t_0. Înlocuind tz_0 cu λ, rezultă că trinomul din membrul stâng al relaţiei (4.2.6) are rădăcina $\lambda_0 = tz_0$, unde $(\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0$ şi $y = \lambda_0 x$ astfel că vectorii x şi y diferă doar printr-un factor complex.

Ne propunem să vedem în ce caz inegalitatea (4.2.5) se reduce la o egalitate. Dacă vectorii x, y sunt coliniari, atunci există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $y = \lambda x$ şi, evident

$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = |\lambda|\,(x,x) = |\lambda|\,|x|^2 = |x|\,|y|\,.$$

Arătăm că şi invers, dacă inegalitatea (4.2.5) se reduce la o egalitate pentru o pereche de vectori nenuli x, y, atunci aceşti vectori sunt coliniari.

Dacă are loc egalitatea

$$|(x,y)| = |x|\,|y|\,,$$

atunci discriminantul trinomului de gradul doi (4.2.4) este egal cu zero şi, prin urmare, trinomul are o unică rădăcină reală λ_0.

Obţinem astfel:

$$\lambda_0^2 (x, x) - 2\lambda_0 (x, y) + (y, y) = (\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0,$$

de unde conform axiomei d) rezultă că $\lambda_0 x - y = 0$ sau $y = \lambda_0 x$.

Aşadar, valoarea absolută a produsului scalar a doi vectori este egală cu produsul lungimilor lor dacă şi numai dacă aceşti vectori sunt coliniari.

Exemplul 4.2.1. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz în spaţiul $\mathcal{R}_n$ are forma

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2},$$

aceasta fiind adevărată pentru orice pereche de vectori $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, pentru orice două sisteme de numere reale $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ şi $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$.

Exemplul 4.2.2. În spaţiul $\mathcal{R}_2(a, b)$ inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz are forma

$$\left|\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt} \sqrt{\int_a^b y^2(t)\, dt}.$$

4.3 Ortogonalitate.

Definiţia 4.3.1. *Vectorii x şi y se numesc ortogonali dacă unghiul neorientat dintre ei este egal cu 90^0 (adică $x \perp y$).*

Noţiunea de ortogonalitate a vectorilor x şi y coincide cu cea de conjugare a acestor vectori relativ la forma biliniară (x, y).

Dacă $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, atunci din această definiţie, ţinând seama şi de definiţia generală a unghiului neorientat a doi vectori, rezultă că x şi y formează un unghi de 90^0. Vectorul nul este ortogonal la orice vector $x \in \mathcal{R}$.

Observaţia 4.3.1. Într-un spaţiu unitar nu se introduce noţiunea de unghi între vectori. Se consideră totuşi condiţia de ortogonalitate a doi vectori x şi y; ca în cazul real aceasta revine la îndeplinirea egalităţii

$$(x, y) = 0.$$

În acest caz avem evident $(y, x) = \overline{(x, y)} = 0$.

Exemplul 4.3.1. În spaţiul $\mathcal{R}_n$ condiţia de ortogonalitate a vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ şi $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ are forma

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + ... + \xi_n \eta_n = 0.$$

Vectorii $e_1 = (1,0,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_n = (0,0,0,...,1)$ sunt ortogonali doi câte doi.

Exemplul 4.3.2. În spaţiul $\mathcal{R}_2(a,b)$ condiţia de ortogonalitate a vectorilor $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ are forma

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Se poate verifica prin calcul direct al integralelor corespunzătoare, că în spaţiul $\mathcal{R}_2(-\pi,\pi)$ orice doi vectori distincţi ai "sistemului trigonometric" $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, ..., \cos nt, \sin nt, ...\}$sunt ortogonali.

Lema 4.3.1. *Vectorii nenuli ortogonali doi câte doi $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Presupunem că aceşti vectori sunt liniar dependenţi; atunci are loc egalitatea

$$C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_kx_k = 0,$$

unde, de exemplu, $C_1 \neq 0$. Înmulţim această egalitate scalar cu x_1; în virtutea ipotezei de ortogonalitate obţinem $C_1(x_1, x_1) = 0$; de aici rezultă $(x_1, x_1) = 0$, adică $x_1 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută. ■

Rezultatul acestei leme va fi folosit sub următoarea formă: dacă suma unor vectori ortogonali doi câte doi este nulă, atunci fiecare din termeni este egal cu zero.

Lema 4.3.2. *Dacă vectorii $y_1, y_2, ..., y_k$ sunt ortogonali vectorului x, atunci orice combinaţie liniară $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k$ este de asemenea ortogonală lui x.*

Demonstraţie. Într-adevăr

$$(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k, x) = \alpha_1(y_1, x) + \alpha_2(y_2, x) + ... + \alpha_k(y_k, x) = 0;$$

prin urmare vectorul $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k$ este ortogonal vectorului x, aşa cum s-a afirmat.

Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k$ formează un subspaţiu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_k)$, acoperirea liniară a vectorilor $y_1, y_2, ..., y_k$. Aşadar, vectorul x este ortogonal fiecărui vector al spaţiului $\mathcal{L}$. ■

În astfel de cazuri vom spune că vectorul x este ortogonal subspaţiului $\mathcal{L}$. În general, dacă $F \subset \mathcal{R}$ este o mulţime oarecare de vectori în spaţiul euclidian $\mathcal{R}$, atunci vom spune că vectorul x este ortogonal mulţimii F dacă el este ortogonal oricărui vector din F.

Mulţimea G a tuturor vectorilor x ortogonali mulţimii F formează ea însăşi conform lemei 4.3.2. un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{R}$. Adeseori această situaţie se întâlneşte în cazul când F însuşi este un subspaţiu şi atunci subspaţiul G se numeşte complementul ortogonal al subspaţiului F.

a) Teorema lui Pitagora şi generalizarea ei.

Fie doi vectori ortogonali x, y; atunci prin analogie cu geometria elementară vectorul $x + y$ poate fi numit ipotenuza triunghiului dreptunghic construit pe vectorii x, y. Înmulţind scalar $x + y$ cu el însuşi şi folosind ortogonalitatea vectorilor x, y obţinem

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$$

$$= (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2 .$$

Am demonstrat astfel că în orice spaţiu euclidian are loc teorema lui Pitagora: pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor. Această teoremă se poate generaliza la cazul oricărei sume finite de vectori. Anume, fie vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ doi câte doi ortogonali şi $z = x_1+x_2+...+x_k$; atunci

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (x_1 + x_2 + ... + x_k, x_1 + x_2 + ... + x_k) = \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_k|^2 . \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

b) Inegalităţile triunghiului.

Dacă x şi y sunt vectori oarecare, atunci prin analogie cu geometria elementară, vectorul $x+y$ poate fi numit cea de a treia latură a triunghiului construit pe vectorii x şi y. Folosind inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwartz obţinem

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y),$$

de unde avem că

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

şi

$$|x+y|^2 \geq |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2 ,$$

sau

$$|x+y| \leq |x| + |y| , \tag{4.3.2}$$

$$|x+y| \geq |x| - |y| . \tag{4.3.3}$$

Inegalităţile (4.3.2), (4.3.3) se numesc inegalităţile triunghiului. Geometric, ele exprimă faptul că lungimea oricărei laturi a unui triunghi nu este mai mare decât suma lungimilor celorlalte două laturi şi lungimea oricărei laturi nu este mai mică decât valoarea absolută a diferenţei lungimilor celorlalte două laturi.

c) Baza ortogonală.

Teorema 4.3.1. *Într-un spaţiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}_n$ există o bază formată din n vectori nenuli ortogonali doi câte doi.*

Demonstraţie. Pentru forma biliniară (x, y) şi de altfel pentru orice formă biliniară simetrică în spaţiul n-dimensional, există o bază canonică $y_1, y_2, ..., y_n$. Condiţia $(y_i, y_k) = 0$, pentru $i \neq k$, satisfăcută de o bază canonică, revine în cazul considerat la ortogonalitatea vectorilor y_i şi y_k; aşadar, baza canonică $y_1, y_2, ..., y_n$ este formată din n vectori ortogonali doi câte doi. Teorema este astfel demonstrată. ■

Vectorii $y_1, y_2, ..., y_n$ ai unei baze ortogonale pot fi normaţi uşor, împărţind fiecare dintre ei prin lungimea lui. Se obţine atunci în spaţiul $\mathcal{R}$ o bază ortogonală şi normată (care uneori se numeşte "ortonormată" sau "ortonormală").

Fie $e_1, e_2, ..., e_n$ o bază ortogonală normată în spaţiul euclidian $\mathcal{R}_n$. Orice vector $x \in \mathcal{R}_n$ poate fi scris sub forma

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \tag{4.3.4}$$

unde $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x. Numim aceste coordonate coeficienţii Fourier ai vectorului x relativ la baza ortonormată $e_1, e_2, ..., e_n$. Înmulţind scalar relaţia (4.3.4) cu e_i, găsim expresia coeficientului ξ_i:

$$\xi_i = (x, e_i) \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{4.3.5}$$

Dacă $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n$ este orice alt vector al spaţiului $\mathcal{R}_n$, atunci aplicând formula pentru produsul scalar obţinem

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + ... + \xi_n \eta_n. \tag{4.3.6}$$

Aşadar, în orice bază ortonormală produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor coordonatelor lor corespunzătoare (adică suma produselor coeficienţilor Fourier).

În particular, punând $y = x$ se obţine

$$|x|^2 = (x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2. \tag{4.3.7}$$

Observaţia 4.3.2. În cazul spaţiilor euclidiene complexe, pentru vectorii ortogonali, rămân adevărate afirmaţiile analoage lemelor 4.3.1.-2. şi teorema lui Pitagora.

Observaţia 4.3.3. Inegalităţile triunghiului pentru cazul complex. Dacă x şi y sunt doi vectori într-un spaţiu unitar $\mathcal{C}$, atunci conform inegalităţii Cauchy-Buniacovski-Schwartz avem

$$\begin{aligned}
&|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y)\,,\\
&|x+y|^2 \leq (x,x) + 2\,|(x,y)| + (y,y) \leq (|x| + |y|)^2\,,\\
&|x+y|^2 \geq (x,x) - 2\,|(x,y)| + (y,y) \geq (|x| - |y|)^2\,,
\end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned}
&|x+y| \leq |x| + |y|\,,\\
&|x+y| \geq |x| - |y|\,.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Inegalităţile (4.3.8) se numesc, ca şi în cazul real, inegalităţile triunghiului.

d) Problema perpendicularei.

Considerăm în spaţiul euclidian $\mathcal{R}$ un subspaţiu finit-dimensional $\mathcal{R}'$ şi un vector f care în general să nu aparţină subspaţiului $\mathcal{R}'$. Ne punem problema de a găsi o descompunere

$$f = g + h, \tag{4.3.9}$$

unde g aparţine subspaţiului $\mathcal{R}'$, iar h este ortogonal acestui subspaţiu.

Definiţia 4.3.2. *Vectorul g din descompunerea (4.3.9) se numeşte proiecţia vectorului f pe subspaţiul $\mathcal{R}'$, iar h este vectorul perpendicular pe $\mathcal{R}'$ dus din extremitatea vectorului f.*

Soluţia acestei probleme a fost dată de fapt în cadrul "Formei canonice a unei forme pătratice" (teorema 3.2.4), pentru orice formă biliniară simetrică nesingulară pe un subspaţiu $\mathcal{R}'$. Deoarece forma pozitiv definită (x, y) este nesingulară pe orice subspaţiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, soluţia problemei noastre împreună cu unicitatea rezultă din acelaşi paragraf "Forma canonică a unei forme pătratice" (teorema 3.2.4), iar prezenţa unei descompuneri de tip (4.3.9) (aşa după cum s-a văzut din acelaşi paragraf amintit anterior-observaţia 3.2.4.) arată că întreg spaţiul $\mathcal{R}$ este suma directă a subspaţiului $\mathcal{R}'$ şi a complementului său ortogonal $\mathcal{R}''$.

O sumă directă ai cărei termeni sunt ortogonali se numeşte sumă directă ortogonală; am construit astfel descompunerea lui $\mathcal{R}$ în suma directă a lui $\mathcal{R}'$ şi $\mathcal{R}''$. Dacă dimensiunea spaţiului $\mathcal{R}$ este egală cu n, iar dimensiunea lui $\mathcal{R}'$ este egală cu k, atunci dimensiunea lui $\mathcal{R}''$ este egală cu $n - k$, deoarece dimensiunea sumei directe este suma dimensiunilor termenilor.

Observăm că problema se rezolvă şi în cazul când vectorul f aparţine subspaţiului $\mathcal{R}'$. În acest caz soluţia are forma

$$f = f + 0.$$

O altă soluţie evident nu există; dacă am avea $h = g + h$, $g \in \mathcal{R}'$, $h \in \mathcal{R}''$, atunci am avea de asemenea $h = f - g \in \mathcal{R}'$, de unde $h = 0$, $g = f$.

Aplicând descompunerii (4.3.9) teorema lui lui Pitagora, obţinem

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2, \tag{4.3.10}$$

de unde rezultă că are loc inegalitatea

$$0 \leq |h| \leq |f|, \tag{4.3.11}$$

care geometric exprimă faptul că lungimea perpendicularei nu depăşeşte lungimea oricărei oblice.

Subliniem cazurile când în vreuna din inegalităţile (4.3.11) are loc semnul de egalitate. Condiţia $0 = |h|$ este echivalentă condiţiei $f = g + 0 = g$, care înseamnă că $g = 0$, conform teoremei lui Pitagora şi, prin urmare

$$f = 0 + h = h;$$

aşadar, f este ortogonal la subspaţiul $\mathcal{R}'$. Astfel, egalitatea $|h| = 0$ înseamnă că vectorul f aparţine subspaţiului $\mathcal{R}'$; egalitatea $|h| = |f|$ revine la aceea că vectorul f este ortogonal acestui subspaţiu. Pentru orice altă aşezare a vectorului f, lungimea vectorului h va fi o mărime pozitivă mai mică decât lungimea vectorului f.

Fie $e_1, e_2, ..., e_k$ o bază ortonormală în subspaţiul $\mathcal{R}'$ şi fie $g = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$. Atunci, conform punctului **c)** "Baze ortogonale" (relaţia (4.3.7))

$$|g|^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

Înlocuind această valoare $|g|^2$ în egalitatea (4.3.10) obţinem

$$|f|^2 = |h|^2 + \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

În particular, pentru orice sistem ortonormal finit $e_1, e_2, ..., e_k$ şi pentru orice vector f obţinem inegalitatea

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 \leq |f|^2,$$

care se numeşte inegalitatea lui Bessel. Sensul ei geometric este: pătratul lungimii vectorului f nu este mai mic decât suma pătratelor proiecţiilor sale pe orice k direcţii ortogonale două câte două.

În aplicaţii este necesară soluţia efectivă a problemei perpendicularei când în subspaţiul $\mathcal{R}'$ este dată o anumită bază $\mathbf{B}=\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ nu neapărat ortogonală sau normată.

Pentru a obţine această soluţie, descompunem vectorul căutat g astfel

$$g = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_k b_k$$

şi aflăm $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ din condiţia ca vectorul $h = f - g$ să fie ortogonal cu toţi vectorii $b_1, b_2, ..., b_k$. Vom obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} (h, b_1) = (f - g, b_1) = (f, b_1) - \beta_1 (b_1, b_1) - \\ -\beta_2 (b_2, b_1) - ... - \beta_k (b_k, b_1) = 0, \\ (h, b_2) = (f - g, b_2) = (f, b_2) - \beta_1 (b_1, b_2) - \\ -\beta_2 (b_2, b_2) - ... - \beta_k (b_k, b_2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (h, b_k) = (f - g, b_k) = (f, b_k) - \beta_1 (b_1, b_k) - \\ -\beta_2 (b_2, b_k) - ... - \beta_k (b_k, b_k) = 0, \end{cases}$$

cu determinantul

$$D = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_2, b_1) & ... & (b_k, b_1) \\ (b_1, b_2) & (b_2, b_2) & ... & (b_k, b_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (b_1, b_k) & (b_2, b_k) & ... & (b_k, b_k) \end{vmatrix}.$$

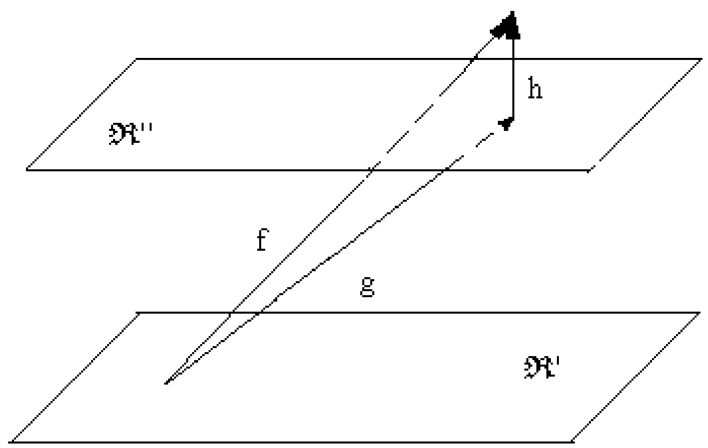
Determinantul D, ca determinant al matricii formei pozitiv definite (x, y) în baza $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ este diferit de zero. Rezolvând sistemul după regula lui Cramer, obţinem expresiile pentru coeficienţii $\beta_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$:

$$\beta_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & ... & (b_{j-1}, b_1) & (f, b_1) & (b_{j+1}, b_1) & ... & (b_k, b_1) \\ (b_1, b_2) & ... & (b_{j-1}, b_2) & (f, b_2) & (b_{j+1}, b_2) & ... & (b_k, b_2) \\ .... & ... & .... & .... & .... & ... & .... \\ (b_1, b_k) & ... & (b_{j-1}, b_k) & (f, b_k) & (b_{j+1}, b_k) & ... & (b_k, b_k) \end{vmatrix}.$$

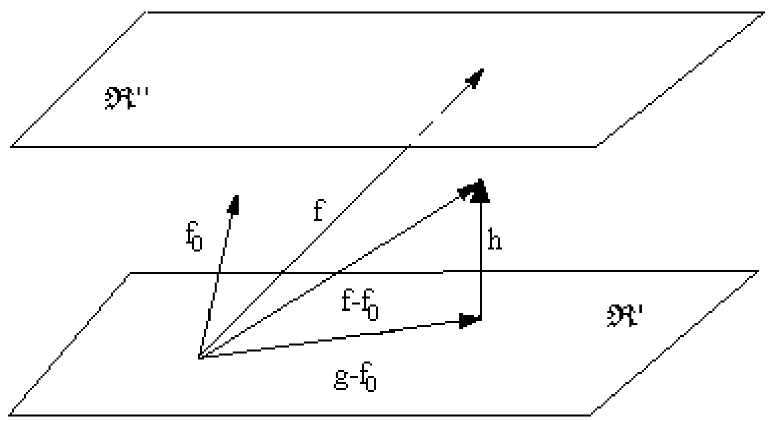
Problema perpendicularei poate fi pusă nu numai pentru spaţii dar şi pentru hiperplane. În acest caz ea se formulează astfel: într-un spaţiu euclidian $\mathcal{R}$ este dat un hiperplan $\mathcal{R}''$ obţinut prin translaţie paralelă a unui subspaţiu $\mathcal{R}'$ cu un vector f; trebuie arătat că există şi este unică o descompunere

$$f = g + h, \tag{4.3.12}$$

unde vectorul g aparţine hiperplanului $\mathcal{R}''$, iar h este ortogonal subspaţiului $\mathcal{R}'$ (geometric, vectorul g are extremitatea situată în hiperplanul $\mathcal{R}''$, iar originea ca de obicei în originea coordonatelor, nu trebuie considerat că vectorul g are suportul situat în hiperplanul $\mathcal{R}''$). Sensul geometric al acestei descompuneri este clarificat în figura de mai jos.



În descompunerea (4.2.12) termenii nu sunt în general ortogonali. Această problemă se reduce la problema perpendicularei pentru subspaţii ale spaţiului euclidian $\mathcal{R}$. Într-adevăr, dacă în hiperplanul $\mathcal{R}''$ este fixat un vector oarecare f_0 şi scădem acest vector din ambii termeni ai egalităţii (4.3.12), atunci obţinem problema descompunerii vectorului $f - f_0$ în termenii $g - f_0$ şi h, primul aparţinând subspaţiului $\mathcal{R}'$, iar cel de al doilea fiind ortogonal acestui subspaţiu (a se vedea figura care urmează).



În virtutea problemei perpendicularei pentru subspaţii ale spaţiului euclidian $\mathcal{R}$, există o astfel de descompunere; aşadar, există şi descompunerea (4.3.12). Rămâne de stabilit unicitatea descompunerii (4.3.12).

În cazul prezenţei a două descompuneri de tipul indicat

$$f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2,$$

am avea

$$0 = (g_1 - g_2) + (h_1 - h_2).$$

Aici $g_1 - g_2$ aparţine subspaţiului $\mathcal{R}'$, iar $h_1 - h_2$ este ortogonal acestui subspaţiu. De aici, $g_1 - g_2 = h_1 - h_2 = 0$, ceea ce era necesar.

4.4 Teorema generală a ortogonalizării.

Pentru construirea sistemelor ortogonale într-un spaţiu euclidian, o valoare deosebită o are următoarea teoremă generală.

Teorema ortogonalizării. *Fie $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ un şir de vectori ai unui spaţiu euclidian $\mathcal{R}$ (finit sau infinit). Notăm prin $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_k)$ acoperirea liniară a primilor k vectori ai acestui sistem. Atunci există un sistem de vectori $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ având următoarele proprietăţi:*

1) *pentru orice k natural, acoperirea liniară $\mathcal{L}'_k$ a vectorilor $y_1, y_2, ..., y_k$ coincide cu subspaţiul $\mathcal{L}_k$;*

2) *pentru orice k natural, vectorul y_{k+1} este ortogonal subspaţiului $\mathcal{L}_k$.*

Demonstraţie. Punem $y_1 = x_1$. Evident $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1$. Vom demonstra apoi teorema prin inducţie; presupunem că vectorii $y_1, y_2, ..., y_k$ sunt deja construiţi, satisfăcând condiţiile puse şi construim vectorul y_{k+1} astfel încât el să satisfacă de asemenea proprietăţile cerute.

Spaţiul $\mathcal{L}_k$ este finit-dimensional şi de aceea în virtutea paragrafului relativ la problema perpendicularei are loc descompunerea

$$x_{k+1} = g_k + h_k, \tag{4.4.1}$$

unde vectorul g_k aparţine subspaţiul $\mathcal{L}_k$, iar vectorul h_k este ortogonal acestui subspaţiu. Punem $y_{k+1} = h_k$. Verificăm îndeplinirea condiţiilor teoremei de ortogonalitate pentru vectorul y_{k+1} astfel determinat.

Subspaţiul $\mathcal{L}_k$ conţine vectorii $y_1, y_2, ..., y_k$, conform ipotezei de inducţie; de aceea şi subspaţiul $\mathcal{L}_{k+1}$ conţine aceşti vectori ($\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_{k+1}$). În plus, din formula (4.4.1) rezultă că $\mathcal{L}_{k+1}$ conţine vectorul $h_k = y_{k+1}$. Astfel, subspaţiul $\mathcal{L}_{k+1}$ conţine toţi vectorii $y_1, y_2, ..., y_{k+1}$ şi odată cu ei întreaga acoperire liniară $\mathcal{L}'_{k+1}$. Dar şi invers, subspaţiul $\mathcal{L}'_{k+1}$ conţine vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$, iar din (4.4.1) el conţine şi vectorul x_{k+1}; de aici rezultă că $\mathcal{L}'_{k+1}$ conţine întreg subspaţiul $\mathcal{L}_{k+1}$. Aşadar, $\mathcal{L}'_{k+1} = \mathcal{L}_{k+1}$ şi prima condiţie a teoremei de ortogonalitate este îndeplinită. Îndeplinirea celei de a doua condiţii este evidentă conform construcţiei vectorului $y_{k+1} = h_k$.

Inducţia este realizată şi teorema este complet demonstrată. ■

Inegalitatea (4.3.11) capătă în cazul considerat forma

$$0 \leq |y_{k+1}| \leq |x_{k+1}| . \tag{4.4.2}$$

Aşa cum s-a mai arătat anterior, egalitatea $0 = |y_{k+1}|$ revine la faptul că vectorul x_{k+1} aparţine subspaţiului $\mathcal{L}_k$, deci este liniar dependent de vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$. Cealaltă egalitate $|y_{k+1}| = |x_{k+1}|$ înseamnă că vectorul x_{k+1} este ortogonal subspaţiului $\mathcal{L}_k$, deci este ortogonal fiecăruia din vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$.

Observaţia 4.4.1. Orice sistem de vectori $z_1, z_2, ..., z_k, ...$ satisfăcând condiţiile teoremei de ortogonalitate, coincide până la factori multiplicativi cu sistemul $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ construit în demonstraţia acestei teoreme.

Într-adevăr, vectorul z_{k+1} trebuie să aparţină subspaţiului $\mathcal{L}_{k+1}$ şi prin urmare, el este ortogonal subspaţiului $\mathcal{L}_k$. Prima din aceste condiţii conduce la existenţa unei descompuneri:

$$z_{k+1} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_k y_k + c_{k+1} y_{k+1} = \widetilde{y_k} + c_{k+1} y_{k+1},$$

unde $\widetilde{y_k} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_k y_k \in \mathcal{L}_k$, iar $c_{k+1} y_{k+1}$ este ortogonal la $\mathcal{L}_k$.

A doua condiţie conduce la afirmaţia că $\widetilde{y_k} = 0$, deci

$$z_{k+1} = c_{k+1} y_{k+1},$$

ceea ce trebuia arătat.

a) Polinoame Legendre.

Considerăm în spaţiul euclidian $\mathcal{R}_2(-1,1)$ sistemul de funcţii $x_0(t) = 1, x_1(t) = t, ..., x_k(t) = t^k, ...$ şi aplicăm acestuia teorema de ortogonalizare. Evident, subspaţiul $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(1, t, t^2, ..., t^k\right)$ coincide în acest caz cu mulţimea tuturor polinoamelor de grad cel mult k. Funcţiile $x_0(t), ..., x_k(t)$ sunt liniar independente şi de aceea funcţiile $y_0(t), y_1(t), ...$ obţinute prin ortogonalizare sunt toate diferite de zero. Prin construcţie, $y_k(t)$ trebuie să fie polinom de grad k în t. În particular, calculul direct după metoda expusă în teorema de ortogonalizare dă succesiv

$$y_0(t) = 1, y_1(t) = t, y_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t \text{ etc.}$$

Aceste polinoame au fost introduse în 1785 de matematicianul francez Legendre în legătură cu probleme din teoria potenţialului. Formula generală pentru polinoamele Legendre a fost descoperită de Rodrigues în 1814. Anume, el a arătat că până la un factor multiplicativ, polinomul $y_n(t)$ este egal cu polinomul

$$p_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right] \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{4.4.3}$$

Pentru demonstraţia acestui fapt folosim observaţia anterioară. Anume, arătăm că polinomul $p_n(t)$ satisface condiţia teoremei de ortogonalizare; în virtutea observaţiei făcute vom avea pentru fiecare $n \geq 0$ egalitatea $p_n(t) = c_n y_n(t)$, ceea ce era necesar.

Teorema 4.4.1. *Acoperirea liniară a vectorilor $p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)$, coincide cu mulţimea tuturor polinoamelor de grad n.*

Demonstraţie. Într-adevăr, aşa cum se vede din formulele (4.4.3), polinomul $p_k(t)$ este în mod evident polinom de grad k în t; în particular

$$\begin{cases} p_0(t) = a_{00}, \\ p_1(t) = a_{10} + a_{11}t, \\ p_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + ... + a_{kk}t^k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n(t) = a_{n0} + a_{n1}t + ... + a_{nn}t^n, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

unde coeficienţii termenilor de grad superior $a_{00}, a_{11}, ..., a_{nn}$ sunt diferiţi de zero.

Astfel, toate polinoamele $p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)$ aparţin acoperirii liniare a funcţiilor $1, t, t^2, ..., t^n$, care este tocmai mulţimea $\mathcal{L}_n$ a tuturor polinoamelor de grad cel mult n. Deoarece matricea relaţiilor liniare (4.4.4) are determinantul $a_{00}a_{11}...a_{nn}$, diferit de zero, atunci şi invers, funcţiile $1, t, t^2, ..., t^n$ pot fi exprimate liniar prin $p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)$; de aceea acoperirea liniară $\mathcal{L}(\ p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t))$ coincide cu acoperirea liniară $\mathcal{L}(1, t, t^2, ..., t^n)$ şi prin urmare, coincide cu mulţimea $\mathcal{L}_n$, adică ceea ce trebuia dovedit. ■

Teorema 4.4.2. *Vectorul $p_n(t)$ este ortogonal subspaţiului $\mathcal{L}_{n-1}$.*

Demonstraţie. Este suficient de verificat că polinomul $p_n(t)$ este ortogonal în $\mathcal{R}_2(-1, 1)$ funcţiilor $1, t, t^2, ..., t^{n-1}$. Pentru demonstraţie vom utiliza formula de integrare prin părţi pe un interval dat, cunoscută din analiza elementară. Derivatele care apar în această formulă pentru polinoame sunt aceleaşi derivate cu cele cunoscute uzual. În particular, polinomul

$$\left[\left(t^2-1\right)^n\right] = (t-1)^n (t+1)^n$$

are derivate egale cu zero de ordin $0, 1, ..., n-1$ în punctele $t = \pm 1$. Vom calcula produsul scalar al funcţiilor t^k şi $p_n(t)$. Integrând prin părţi, obţinem

$$\begin{aligned}
&\left(t^k, p_n(t)\right) = \int_{-1}^{1} t^k \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n)} dt = \\
&= t^k \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-1)} /_{-1}^{1} - k \int_{-1}^{1} t^{k-1} \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-1)} dt.
\end{aligned}$$

Primul termen, cel neintegrat al expresiei obţinute, este egal cu zero, conform celor spuse anterior. Integrala rămasă poate fi din nou calculată prin părţi şi continuăm acest proces până ce exponentul lui t ajunge la zero:

$$\begin{aligned}
&\left(t^k, p_n(t)\right) = -kt^{k-1} \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-2)} /_{-1}^{1} + \\
&+k(k-1) \int_{-1}^{1} t^{k-2} \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-2)} dt = \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\
&= \pm k! \int_{-1}^{1} \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-k)} dt = \pm k! \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n-k-1)} /_{-1}^{1} = 0,
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Astfel, am arătat că pentru orice n, polinomul $p_n(t)$ coincide până la un factor numeric cu polinomul

$$p_n(t) = \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n)}.$$

Calculăm valoarea $p_n(1)$. Pentru aceasta, aplicăm funcţiilor $\left(t^2-1\right)^n = (t+1)^n (t-1)^n$ regula derivatei de ordin n a unui produs:

$$\begin{aligned}
&\left[(t+1)^n (t-1)^n\right]^{(n)} = \\
&= (t+1)^n \left[(t-1)^n\right]^{(n)} + C_n^1 \left[(t+1)^n\right]' \left[(t-1)^n\right]^{(n-1)} + \ldots = \\
&= (t+1)^n n! + C_n^1 n (t+1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2(t-1) + \ldots
\end{aligned}$$

Înlocuind aici $t = 1$ toţi termenii acestei sume sunt nuli începând cu al doilea. Aşadar, $p_n(t) = 2^n n!$.

Pentru motive calculatorii, este comod ca funcţiile ortogonale considerate să fie egale cu 1 pentru $t = 1$. Pentru a realiza acest lucru, introducem factorul

$$\frac{1}{2^n n!}.$$

Polinoamele astfel obţinute se numesc polinoame Legendre; polinomul Legendre de grad n se notează prin $P_n(t)$, deci

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left[\left(t^2-1\right)^n\right]^{(n)}.$$

b) Determinantul Gram.

Definiţia 4.4.1. *Fie $x_1, x_2, ..., x_k$ vectori oarecare din spaţiul euclidian $\mathcal{R}$. Se numeşte determinant Gram, orice determinant de forma*

$$G(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & ... & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & ... & (x_2, x_k) \\ .... & .... & ... & .... \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & ... & (x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

Este cunoscut că în cazul vectorilor liniar independenţi $x_1, x_2, ..., x_k$, acest determinant este pozitiv (matrice simetrică).

Are loc următorul rezultat.

Teorema (relativ la determinantul Gram). *Determinantul Gram al vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ este nul dacă aceşti vectori sunt liniar dependenţi şi este pozitiv dacă vectorii sunt liniar independenţi; el este egal cu produsul pătratelor lungimilor vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ dacă ei sunt ortogonali doi câte doi, în caz contrar el este mai mic decât această mărime.*

Demonstraţie. Pentru calculul determinantului Gram aplicăm vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ procesul de ortogonalizare. Fie de exemplu $y_1 = x_1$ şi vectorul $y_2 = \alpha_1 y_1 + x_2$ ortogonal lui y_1. Înlocuim în toate locurile în determinant vectorul x_1 prin y_1. Apoi adăugăm coloanei a doua, prima coloană a determinantului Gram înmulţită cu α_1 (atribuind α_1 celui de al doilea factor al produselor scalare) şi apoi adăugăm la cea de a doua linie elementele primei linii a determinantului înmulţite cu α_1 (atribuind α_1 primului factor al produselor scalare). În rezultat, pe toate acele locuri ale determinantului unde se afla x_2, se va găsi acum vectorul y_2.

Fie apoi $y_3 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + x_3$ ortogonal la y_1 şi la y_2; adăugăm la coloana a treia prima coloană înmulţită cu β_1 şi a doua înmulţită cu β_2; aceeaşi operaţie este efectuată pentru linii. Ca rezultat, x_3 apare în toate locurile înlocuit cu y_3. Continuăm acest procedeu până la ultima coloană. Deoarece operaţiile noastre nu au modificat valoarea determinantului, vom obţine ca rezultat

$$G(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & (y_2, y_2) & ... & 0 \\ .... & .... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & (y_k, y_k) \end{vmatrix} = \tag{4.4.5}$$

$$= (y_1, y_1)(y_2, y_2) ... (y_k, y_k).$$

Conform inegalităţii (4.4.2) rezultă următoarea inegalitate

$$0 \leq G(x_1, x_2, ..., x_k) \leq (x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_k, x_k). \tag{4.4.6}$$

Să vedem acum în ce condiţii mărimea $G(x_1, x_2, ..., x_k)$ poate lua valori extreme 0 sau $(x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_k, x_k)$.

Din expresia (4.4.5) a determinantului Gram rezultă că el este nul dacă şi numai dacă unul din vectorii $y_1, y_2, ..., y_k$ este nul. În conformitate cu cele relatate în demonstraţia inegalităţii (4.4.2), aceasta echivalează cu dependenţa liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$. Pe de altă parte, egalitatea determinantului Gram cu membrul drept al inegalităţii (4.4.6) este posibilă conform formulelor (4.4.5) şi (4.4.2), numai în cazul când vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ sunt ortogonali. Astfel, teorema este complet demonstrată. ■

4.5 Endomorfisme simetrice.

Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două spaţii vectoriale complexe şi euclidiene al căror produs scalar îl vom nota la fel ca în paragrafele anterioare. Fie $\mathcal{A} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ o transformare liniară.

Definiţia 4.5.1. *Transformarea liniară $\mathcal{A}^* : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ definită prin*

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y), \ \forall x \in \mathcal{C}_1, \forall y \in \mathcal{C}_2$$

se numeşte adjuncta lui $\mathcal{A}$.

Un endomorfism $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ se numeşte:

1) *hermitian dacă $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$;*

2) *antihermitian dacă $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$.*

Teorema 4.5.1. *Endomorfismul $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ este hermitian dacă şi numai dacă produsul scalar $(\mathcal{A}x, x)$ este real, pentru orice $x \in \mathcal{C}$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, atunci $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^* x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$ (bara înseamnă conjugatul complex). Deci $(\mathcal{A}x, x)$ este real pentru orice $x \in \mathcal{C}$.

Reciproc, dacă $(\mathcal{A}x, x)$ este real, atunci $(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} = \overline{(x, \mathcal{A}^* x)} = (\mathcal{A}^* x, x)$. Aşadar, $((\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) x, x) = 0$, pentru orice $x \in \mathcal{C}$ şi deci $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. ■

Teorema 4.5.2. *Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ hermitieni şi $k \in \mathbf{R}$. Atunci*

1) *$k\mathcal{A} + \mathcal{B}$ este hermitian;*

2) *dacă $\mathcal{A}$ este inversabil, atunci şi $\mathcal{A}^{-1}$ este hermitian;*

3) *$\mathcal{AB}$ este hermitian dacă şi numai dacă $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.*

Demonstraţie. 1) afirmaţia este uşor de verificat deoarece $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$ şi $(k\mathcal{A})^* = k\mathcal{A}^*$.

2) rezultă din $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$.

3) $\mathcal{AB}$ hermitian implică $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{AB}$. Dar $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{BA}$ deoarece $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{A}$ sunt hermitieni. Deci are loc $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. Reciproc, $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, dar $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt hermitieni, deci $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{BA} = \mathcal{AB}$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Definiţia 4.5.2. *O transformare liniară $\mathcal{A} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ se numeşte unitară dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{C}_1$.*

Teorema 4.5.3. *Transformarea liniară $\mathcal{A} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ este unitară dacă şi numai dacă $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathcal{C}_1$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{A}$ este unitară, atunci $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$, pentru orice $x, y \in \mathcal{C}_1$; în particular pentru $y = x$, avem $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$, adică $\|\mathcal{A}x\|^2 = \|x\|^2$ şi deci $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$. Reciproc, dacă $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathcal{C}_1$, atunci folosind egalitatea

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right],$$

avem

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \tfrac{1}{4}\left[\|\mathcal{A}(x + y)\|^2 - \|\mathcal{A}(x - y)\|^2\right] +$$

$$+\tfrac{1}{4}\left[i\|\mathcal{A}(x + iy)\|^2 - i\|\mathcal{A}(x - iy)\|^2\right] = (x, y).$$

Deci $\mathcal{A}$ este unitară. ■

Observaţia 4.5.1. Condiţia $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ este echivalentă cu $\mathcal{AA}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ este transformarea identică); deci putem spune că $\mathcal{A}$ este unitar dacă şi numai dacă $\mathcal{AA}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

Teorema 4.5.4. *Orice transformare unitară $\mathcal{A} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ este injectivă.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{A}$ este unitară are loc $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$. Deci $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$ şi dacă $\mathcal{A}x = 0$ rezultă $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0$, adică $(x, x) = 0$ care implică $x = 0$. Rezultă $\ker \mathcal{A} = \{0\}$ şi deci $\mathcal{A}$ este injectivă. ■

Presupunem că $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt n-dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată. Transformării liniare $\mathcal{A} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ i se ataşază matricea A. Matricea $A^* = \overline{A}^t$ ataşată lui $\mathcal{A}^*$ se numeşte adjuncta matricei A.

Dacă $A = \overline{A}^t$, atunci matricea pătratică A se numeşte hermitică, iar dacă $A = -\overline{A}^t$, atunci matricea pătratică A se numeşte antihermitică. O matrice cu proprietatea $AA^* = I$, unde I este matricea unitate, se numeşte matrice unitară.

Teorema 4.5.5. *Un endomorfism $\mathcal{A} : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$ este hermitian dacă şi numai dacă matricea lui într-o bază ortonormată este hermitică.*

Demonstraţie. Fie **B**= $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset \mathcal{C}_n$ baza ortonormată faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ este $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Fie că $\mathcal{A}$ este hermitian. Din $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, prin înmulţire scalară cu e_i, obţinem $(\mathcal{A}e_j, e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}(e_k, e_i) =$

a_{ij} şi analog $(\mathcal{A}^* e_j, e_i) = a_{ij}$. Dar $(\mathcal{A}e_j, e_i) = (e_j, \mathcal{A}^* e_i) = (e_j, \mathcal{A}e_i) = \overline{a_{ji}}$. Deci $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$ şi cum $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ rezultă $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, adică $A = \overline{A}^t$.

Reciproc, dacă $A = \overline{A}^t$, avem

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}e_j, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 (\mathcal{A}e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k, e_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 a_{kj} (e_k, e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \overline{a_{jk}} (e_k, e_j) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \overline{a_{jj}} = \overline{(\mathcal{A}x, x)},$$

adică $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbf{R}$ şi deci $\mathcal{A}$ este hermitian. ■

Condiţia ca baza să fie ortonormată este esenţială şi vom ilustra acest lucru prin exemplul următor.

Exemplul 4.5.1. Fie $\mathcal{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definit prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

în baza $f_1 = (1, 0), f_2 = (1, 1)$. Deoarece $\overline{A}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq A$, matricea A nu este hermitică şi totuşi $\mathcal{A}$ este hermitian.

Să găsim matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ care este o bază ortonormată. Avem

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Deci $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere astfel încât matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică, pe care o notăm prin B, este

$$B = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \overline{B}^t.$$

Observaţia 4.5.2. Un endomorfism $\mathcal{A} : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$ este unitar dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată a spaţiului $\mathcal{C}_n$ este unitară.

Exemplul 4.5.2. Endomorfismul $\mathcal{A} : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ definit prin

$$\mathcal{A}(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha), \ x = (x_1, x_2), \ \alpha \in [0, 2\pi]$$

este un endomorfism unitar deoarece matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică ortonormată $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ este unitară.

Într-adevăr,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

iar

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

şi deci

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

În continuare presupunem că $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ sunt două spaţii vectoriale reale şi euclidiene al căror produs scalar îl notăm ca şi până acum cu $(.,.)$. Fie $\mathcal{A} : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ o transformare liniară.

Definiţia 4.5.3. *Transformarea liniară $\mathcal{A}^* : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1$ definită prin*

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y), \forall x \in \mathcal{R}_1, \forall y \in \mathcal{R}_2$$

se numeşte transpusa lui $\mathcal{A}$.

Endomorfismul $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ se numeşte:

1) *simetric dacă $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$;*

2) *antisimetric dacă $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$.*

Definiţia 4.5.4. *Transformarea liniară $\mathcal{A} : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ se numeşte ortogonală dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$, pentru orice $x, y \in \mathcal{R}_1$ echivalentă cu condiţia ca $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathcal{R}_1$.*

Dacă admitem că $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ sunt finit dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată, atunci transformării $\mathcal{A} : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ i se ataşază matricea A, iar lui $\mathcal{A}^*$ matricea $A^* = A^t$. Unui endomorfism simetric îi corespunde o matrice simetrică, iar unui endomorfism antisimetric îi corespunde o matrice antisimetrică. Unui endomorfism ortogonal îi corespunde o matrice ortogonală.

Observaţia 4.5.3. Transformările simetrice respectiv antisimetrice, au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor hermitiene, respectiv antihermitiene. Transformările ortogonale au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor unitare.

Capitolul 5

Tensori.

5.1 Tensori.

Coordonatele unui vector, coeficienţii unei forme liniare, elementele matricii unui operator liniar, sunt exemple de mărimi geometrice numite tensori.

Înainte de a trece la definiţia corespunzătoare, raţionalizăm puţin sistemul de notaţii adoptat.

Vectorii unei baze într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ vor fi notaţi ca şi până acum, prin simboluri $e_1, e_2, ..., e_n$ (cu indicii inferiori). Coordonatele vectorilor $x, y, ...$ vor fi notate respectiv prin simbolurile $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n, \eta^1, \eta^2, ..., \eta^n, ...$ (cu indicii superiori). Coeficienţii unei forme liniare $L(x)$ vor fi notaţi cu $l_1, l_2, ..., l_n$ (cu indici inferiori).

Elementele matricii unui operator liniar vor fi notate prin a_i^j; indicele superior arată numărul liniei, iar cel inferior arată numărul coloanei (spre deosebire de notaţiile uzuale a_{ij}).

Utilizarea unei astfel de plasări a indicilor se află în următoarea convenţie de însumare: dacă avem o sumă de n monoame, astfel încât indicele de sumare i se întâlneşte în termenul general al sumei de două ori, o dată sus şi o dată jos, atunci simbolul sumă va fi omis (convenţia de sumare a lui Einstein). De exemplu, dezvoltarea unui vector x în baza **B**$= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ va fi scrisă sub forma

$$x = \xi^i e_i$$

(simbolul sumă după i este omis, dar este subînţeles). Expresia unei forme liniare $L(x)$ cu ajutorul coordonatelor vectorului şi coeficienţilor formei este

$$L(x) = l_i \xi^i.$$

Rezultatul aplicării operatorului $\mathcal{A}$ vectorului e_i are forma următoare

$$\mathcal{A}e_i = a_i^j e_j$$

(însumare după j). Coordonatele η^j ale vectorului $\mathcal{A}x$ se exprimă atunci prin coordonatele vectorului x în modul următor:

$$\eta^j = a_i^j \xi^i$$

(însumare după i).

Mărimile care se referă la un nou sistem de coordonate vor fi notate prin aceleaşi simboluri, dar cu accente pe indici. Astfel, vectorii noii baze vor fi notaţi $e_{1'}, e_{2'}, ..., e_{n'}$, noile coordonate ale vectorului x sunt notate $\xi^{1'}, \xi^{2'}, ..., \xi^{n'}$ etc.

Elementele matricii de trecere de la baza e_i la baza $e_{i'}$, le notăm cu $p_{i'}^i$, deci

$$e_{i'} = p_{i'}^i e_i \tag{5.1.1}$$

(însumare după i).

Coeficienţii matricii trecerii inverse vor fi notaţi prin $q_i^{i'}$:

$$e_i = q_i^{i'} e_{i'} \tag{5.1.2}$$

(însumare după i'). Matricea $q_i^{i'}$ este inversa matricii $p_{i'}^i$, ceea ce poate fi scris astfel

$$p_{i'}^i q_j^{i'} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \neq j, \\ 1, & \text{pentru } i = j, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

sau prin egalitatea

$$p_{i'}^i q_i^{j'} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i' \neq j', \\ 1, & \text{pentru } i' = j'. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Pentru prescurtarea scrierii, mărimea depinzând de indicii i şi j, egală cu 0 pentru $i \neq j$ şi cu 1 dacă $i = j$ se notează cu δ_j^i (simbolul lui Kronecker); relaţia (5.1.3) se scrie echivalent

$$p_{i'}^i q_j^{i'} = \delta_j^i \ , \tag{5.1.5}$$

iar relaţia (5.1.4) se scrie

$$p_{i'}^i q_i^{j'} = \delta_{j'}^{i'} \ . \tag{5.1.6}$$

Pentru a arăta avantajele utilizării noilor notaţii, deducem din nou formulele de transformare a coordonatelor unui vector, a coeficienţilor unei forme liniare şi a elementelor matricii unui operator prin trecerea la o nouă bază.

Fie acum $x = \xi^i e_i = \xi^{i'} e_{i'}$. Înlocuind e_i prin $q_i^{i'} e_{i'}$, conform (5.1.2) se obţine

$$x = \xi^i q_i^{i'} e_{i'} = \xi^{i'} e_{i'} \ .$$

Deoarece $e_{i'}$ constituie o bază, rezultă coordonatele vectorului x în această bază sunt unic determinate şi deci

$$\xi^{i'} = \xi^i q_i^{i'} \ . \tag{5.1.7}$$

Aceasta este tocmai formula de transformare a coordonatelor unui vector.

Fie acum o formă liniară $L(x)$. Numerele $l_{i'}$ se determină ca de obicei prin egalităţile $l_{i'} = L(e_{i'})$. Înlocuind $e_{i'}$ prin $p_{i'}^i e_i$, conform (5.1.1) se obţine

$$l_{i'} = L\left(p_{i'}^i e_i\right) = p_{i'}^i L(e_i) = p_{i'}^i l_i \ .$$

Astfel,

$$l_{i'} = p_{i'}^i l_i \ ; \tag{5.1.8}$$

adică tocmai formula căutată.

În sfârşit, fie $\mathcal{A}$ un operator. Elementele matricii sale într-o nouă bază se determină din egalităţile

$$\mathcal{A}e_i = a_{i'}^{j'} e_{j'} \ .$$

Înlocuind aici $e_{i'}$ (respectiv $e_{j'}$) prin formulele $p_{i'}^i e_i$ (respectiv $p_{j'}^j e_j$), folosind (5.1.1) rezultă

$$p_{i'}^i \mathcal{A}e_i = a_{i'}^{j'} p_{j'}^j e_j \ .$$

Dar $\mathcal{A}e_i = a_i^j e_j$ şi prin urmare

$$p_{i'}^i a_i^j e_j = a_{i'}^{j'} p_{j'}^j e_j \ .$$

Deoarece e_j constituie o bază, rezultă

$$p_{i'}^i a_i^j = a_{i'}^{j'} p_{j'}^j \ .$$

Pentru a obţine de aici $a_{i'}^{j'}$, înmulţim ambii membri ai acestei egalităţi cu $q_j^{k'}$ şi însumăm după j. Conform formulei (5.1.6) vom obţine

$$p_{i'}^i a_i^j q_j^{k'} = a_{i'}^{j'} p_{j'}^j q_j^{k'} = a_{i'}^{j'} \delta_{j'}^{k'} \ .$$

Conform definiţiei mărimilor $\delta_{j'}^{k'}$ şi însumând după j' , trebuie reţinut numai termenul care corespunde valorii $j' = k'$. În acest caz $\delta_{k'}^{k'} = 1$ şi, prin urmare, are loc

$$a_{i'}^{k'} = p_{i'}^i q_j^{k'} a_i^j \ , \tag{5.1.9}$$

care este tocmai formula căutată.

Se verifică fără dificultate că toate cele trei formule de transformare obţinute mai înainte, coincid cu formulele obţinute anterior pe cale obişnuită (a se vedea capitolul spaţii vectoriale, paragraful legat de schimbarea coordonatelor unui vector la o schimbare a bazei).

Formulele (5.1.7-9) exprimă mai multe proprietăţi comune. În primul rând, aceste formule sunt liniare relativ la mărimile care se transformă. Apoi coeficienţii acestor formule sunt fie elemente ale matricii de trecere de la baza veche la baza nouă, fie elemente ale matricii inverse de trecere, fie şi una şi alta.

În continuare vom prezenta ca un caz particular noţiunea de tensor de ordinul al doilea.

Relaţia (5.1.7) ne arată că dacă se face o schimbare de baze, componentele vectorului x se transformă după legile

$$\xi^{i'} = q_i^{i'}\xi^i \text{şi } \xi^i = p_{i'}^i\xi^{i'} \ \ (i, i' = 1, 2, 3)\,. \tag{5.1.10}$$

Aceste relaţii corespund faptului că x are un sens intrinsec, independent de baza alesă.

În mecanică se întâlnesc şi alte entităţi care, într-o bază dată, sunt caracterizate prin mai multe numere, acestea transformându-se la o schimbare a bazei după o anumită lege. Ne vom limita aici la considerarea tensorilor de ordinul al doilea.

După cum un vector x în spaţiul euclidian tridimensional este caracterizat prin trei componente ξ^i $(i = 1, 2, 3)$, un tensor de ordinul al doilea, pe care îl vom nota prin T, este caracterizat într-o bază **B** formată din trei elemente prin componentele ξ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, iar într-o bază **B'**prin componentele $\xi^{i'j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$. Între aceste componente se impun, prin generalizarea lui (5.1.10), relaţiile

$$\xi^{i'j'} = q_i^{i'} q_j^{j'} \xi^{ij} \ \ (i', j' = 1, 2, 3) \tag{5.1.11}$$

(însumare după $i = 1, 2, 3$ şi $j = 1, 2, 3$).

Din (5.1.11) se deduc uşor componentele ξ^{ij} în funcţie de componentele $\xi^{i'j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$. Într-adevăr, să înmulţim în (5.1.11) cu $p_{i'}^s p_{j'}^t$ obţinem

$$p_{i'}^s p_{j'}^t \xi^{i'j'} = p_{i'}^s p_{j'}^t q_i^{i'} q_j^{j'} \xi^{ij} \ ,$$

conform (5.1.5) se obţine

$$p_{i'}^s p_{j'}^t \xi^{i'j'} = \delta_i^s \delta_j^t \xi^{ij} \ ,$$

adică

$$\xi^{ij} = p_{i'}^i p_{j'}^j \xi^{i'j'} \ \ (i, j = 1, 2, 3)\,. \tag{5.1.12}$$

Prin urmare, un tensor T de ordinul al doilea este o entitate matematică de componente ξ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ în baza **B** şi care la schimbarea ei în **B'**, primeşte componentele $\xi^{i'j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$ legate de cele din prima bază prin relaţiile (5.1.11) sau (5.1.12).

Noţiunea de tensor de ordinul al doilea a apărut în mecanica mediilor continue deformabile; ea a fost introdusă de A.L.Cauchy (1789-1857), care a pus bazele acestui capitol al mecanicii.

Utilizând notaţia matricială, un tensor de ordinul al doilea T poate fi reprezentat într-o bază **B** formată din trei elemente prin matricea

$$X = \left(\xi^{ij}\right)_{1\le i,j\le 3} ,$$

iar în baza **B'** formată tot din trei elemente prin matricea

$$X' = \left(\xi^{i'j'}\right)_{1\le i',j'\le 3} ,$$

legătura între aceste matrici fiind dată de

$$X' = AXA^t = AXA^{-1} , \tag{5.1.13}$$

unde $A = (p^i_{i'})_{1\le i,i'\le 3}$, iar $A^{-1} = \left(q^{i'}_i\right)_{1\le i,i'\le 3}$. De asemeni, legătura inversă este dată de

$$X = A^{-1}XA . \tag{5.1.14}$$

Relaţiile (5.1.13) şi (5.1.14) reprezintă transcrierea matricială a relaţiilor (5.1.11) şi (5.1.12).

Exemple de tensori de ordinul al doilea.

Exemplul 5.1.1. Fie vectorii x şi y cu componentele ξ^1, ξ^2, ξ^3 şi η^1, η^2, η^3 într-o bază **B** formată din trei elemente. Componentele $\mu^{ij} = \xi^i\eta^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ definesc în baza **B** un tensor T. Componentele acestui tensor într-o altă bază **B'** formată tot din trei elemente vor fi $\mu^{i'j'} = \xi^{i'}\eta^{j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$.

Într-adevăr, avem

$$\mu^{i'j'} = \xi^{i'}\eta^{j'} = q^{i'}_i\xi^i q^{j'}_j\xi^j = q^{i'}_i q^{j'}_j \xi^i\xi^j = q^{i'}_i q^{j'}_j \mu^{i'j'} .$$

Tensorul T astfel obţinut va fi denumit produsul tensorial al vectorilor x şi y (consideraţi ca tensori de ordinul întâi). Se va scrie

$$T = x \otimes y .$$

Exemplul 5.1.2. Tensorul $W = y \otimes x$ are într-o bază **B** formată din trei elemente componentele

$$\rho^{ij} = \eta^i\xi^j \;\; (i, j = 1, 2, 3) .$$

În general $x \otimes y$ este diferit de $y \otimes x$.

Exemplul 5.1.3. Tensorul E, numit tensorul unitate, are în baza **B** (cu trei elemente) componentele $\zeta^{ij} = \delta^{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. În baza **B'** formată şi ea tot din trei elemente, tensorul are componentele $\zeta^{i'j'} = \delta^{i'j'}$ $(i', j' = 1, 2, 3)$ după cum se constată uşor.

Se poate acum trece la definiţia propriu zisă a noţiunii de tensor în general. Tensorii se împart în covarianţi, contravarianţi şi micşti. În plus, orice tensor are un ordin bine determinat (numărul de indici defineşte ordinul tensorului).

Începem cu definiţia tensorului covariant de ordinul trei.

Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate dintr-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ să se construiască n^3 numere T_{ijk} (componentele tensorului), fiecare fiind definit pentru indicii i, j, k fixaţi între 1 şi n. Aceste numere T_{ijk} formează, prin definiţie, un tensor covariant de ordinul trei dacă transformarea mărimilor i, j, k prin trecerea la o nouă bază se realizează prin formula

$$T_{i'j'k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} T_{ijk} \ .$$

În mod analog se definesc tensorii covarianţi de orice ordin; un tensor de ordin m are n^m componente (şi nu n^3) şi în formula de transformare se află nu trei factori de forma $p^i_{i'}$ ci m astfel de factori.

Coeficienţii unei forme liniare, care se transformă, aşa cum am văzut, după formula (5.1.8), oferă un exemplu de tensor covariant de ordinul întâi.

Dăm acum noţiunea de tensor contravariant de ordinul trei. Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate să se construiască n^3 numere T^{ijk}, fiecare din ele fiind definit pentru indicii i, j, k cuprinşi între 1 şi n. Aceste numere T^{ijk} formează un tensor contravariant de ordin trei dacă transformarea mărimilor T^{ijk} prin schimbarea bazei are loc după formula

$$T^{i'j'k'} = q^{i'}_i q^{j'}_j q^{k'}_k T^{ijk} \ .$$

În mod analog se definesc tensori contravarianţi de orice ordin. În particular, coordonatele unui vector x formează un tensor contravariant de ordinul întâi.

Termenii "covariant" şi "contravariant", introduşi mai înainte, se explică în modul următor. "Covariant" înseamnă "care se schimbă la fel" cu vectorii unei baze, adică prin utilizarea coeficienţilor $p^i_{i'}$. "Contravariant" înseamnă "care se schimbă invers", adică prin utilizarea coeficienţilor $q^{i'}_i$.

Se pot de asemenea considera tensori micşti. De exemplu, n^3 numere T^k_{ij} date în fiecare sistem de coordonate, formează un tensor mixt de ordinul trei, de două ori covariant şi o dată contravariant, dacă transformarea acestor mărimi prin trecerea la o nouă bază se realizează după formula

$$T_{i'j'}^{k'} = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_{k}^{k'} T_{ij}^{k} \ .$$

În mod analog se definesc tensori micşti de l ori covarianţi şi de m ori contravarianţi.

De exemplu, elementele matricii unui operator liniar formează un tensor mixt de ordin doi, o dată covariant şi o dată contravariant. Trebuie notat că poziţia indicilor permite indicarea caracterului unui tensor.

5.2 Operaţii cu tensori.

a) Egalitatea. *Spunem că doi tensori T şi W sunt egali dacă şi numai dacă componentele lor sunt egale.*

Exemplul 5.2.1. Fie T şi W tensori de ordinul al doilea. Spunem că $T = W$ dacă $\xi^{ij} = \eta^{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, unde ξ^{ij} şi η^{ij} sunt componentele tensorilor T şi respectiv W.

b) Adunarea (scăderea) a doi tensori de aceeaşi structură. Pentru comoditate considerăm doi tensori T_{ij}^{k} şi S_{ij}^{k} (de două ori covarianţi şi o dată contravarianţi) de ordinul al treilea, dar operaţia în sine rămâne valabilă pentru tensori de orice ordin. Suma lor va fi un tensor Q_{ij}^{k} de aceeaşi structură; în orice sistem de coordonate, prin fixarea lui i, j, k, componentele sumei reprezintă suma componentelor corespunzătoare. Faptul că mărimile Q_{ij}^{k} formează într-adevăr un tensor (de aceeaşi structură cu a termenilor), rezultă din următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} Q_{i'j'}^{k'} &= T_{i'j'}^{k'} + S_{i'j'}^{k'} = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_{k}^{k'} T_{ij}^{k} + p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_{k}^{k'} S_{ij}^{k} = \\ &= p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_{k}^{k'} \left(T_{ij}^{k} + S_{ij}^{k} \right) = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} q_{k}^{k'} Q_{ij}^{k} \ . \end{aligned}$$

c) Produsul unui tensor cu un scalar. Pentru exemplificare considerăm un tensor de ordinul al doilea T de componente ξ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ şi λ un scalar. Prin λT cu componentele $\lambda \xi^{ij}$ într-o bază $\mathbf{B}$ (formată din trei elemente) se defineşte un nou tensor, numit produsul tensorului T cu scalarul λ. Caracterul tensorial al obiectului obţinut este imediat

$$\lambda \xi^{i'j'} = \lambda q_{i}^{i'} q_{j}^{j'} \xi^{ij} = q_{i}^{i'} q_{j}^{j'} \lambda \xi^{ij} \ .$$

d) Operaţia de înmulţire a doi tensori. Această operaţie este aplicată tensorilor de orice structură. De exemplu, înmulţim un tensor T_{ij} cu un tensor S_{k}^{l} . Acesta va fi un tensor Q_{ijk}^{l} de ordinul 4; în fiecare sistem de coordonate, pentru i, j, k fixate, componenta respectivă este chiar produsul componentelor corespunzătoare ale factorilor. Caracterul tensorial în cazul lui Q^l_{ijk} se verifică în modul următor:

$$Q^{l'}_{i'j'k'} = T_{i'j'} S^{l'}_{k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} T_{ij} p^k_{k'} q^{l'}_l S^l_k =$$
$$= p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} q^{l'}_l T_{ij} S^l_k = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} q^{l'}_l Q^l_{ijk} \ .$$

e) Contracţia. Se aplică tensorilor pentru care există cel puţin un indice covariant şi unul contravariant. De exemplu, fie tensorul T^k_{ij}, căruia îi aplicăm contracţia indicilor k şi i, care constă în a considera mărimile T^i_{ij} , unde i este indice de însumare şi se însumează după i; mărimile $T_j = T^i_{ij}$ depind numai de indicele j. Se obţine astfel un nou tensor, al cărui ordin este cu două unităţi mai mic decât cel iniţial. Arătăm caracterul tensorial al lui T_j din exemplul anterior. Avem

$$T_{j'} = T^{i'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} q^{i'}_k T^k_{ij} = \left(p^i_{i'} q^{i'}_k\right) p^j_{j'} T^k_{ij} =$$
$$= \delta^i_k p^j_{j'} T^k_{ij} \ .$$

Aici prin însumare este suficient să ne mărginim la valoarea $k = i$ (însumare după k); deoarece $\delta^i_i = 1$, obţinem

$$T_{j'} = p^j_{j'} T^i_{ij} = p^j_{j'} T_j \ ,$$

ceea ce trebuia arătat.

Teorema 5.2.1. *Prin contracţia unui tensor de ordinul al doilea se obţine un invariant, adică un scalar independent de sistemul de referinţă.*

Demonstraţie. Pornim de la reprezentarea tensorului $a^{j'}_{i'}$ în funcţie de a^j_i . Avem

$$a^{i'}_{i'} = p^i_{i'} q^{i'}_j a^j_i = \delta^i_j a^j_i = a^i_i \ ,$$

prin urmare scalarul

$$a^{1'}_{1'} + a^{2'}_{2'} + a^{3'}_{3'} = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3$$

este un invariant faţă de schimbarea bazei considerate, adică tocmai ce trebuia demonstrat. ■

Exemplul 5.2.2. Matricea c^j_i a produsului a doi operatori cu matricile corespunzătoare a^k_i şi b^j_l este un tensor mixt de rangul doi, care se obţine prin contracţia tensorului de rangul patru $a^k_i b^j_l$ după indicii k şi l.

Partea II

Geometrie analitică

Capitolul 6

Vectori liberi.

6.1 Noţiunea de vector liber.

Fie $\mathbf{E}_3$ spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare şi $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. A se numeşte originea, iar B se numeşte extremitatea segmentului. În cazul când originea şi extremitatea coincid se obţine segmentul orientat nul. Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte dreapta suport a lui $\overrightarrow{AB}$ şi se notează cu AB. Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată. Două segmente orientate se numesc coliniare, respectiv paralele, dacă dreptele lor suport sunt egale, respectiv paralele.

Definiţia 6.1.1. *Două drepte din $\mathbf{E}_3$ au aceeaşi direcţie dacă sunt paralele sau egale.*

Teorema 6.1.1. *Relaţia binară "aceeaşi direcţie" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea dreptelor din spaţiu.*

Demonstraţie. Relaţia "aceeaşi direcţie" este reflecsivă, simetrică şi tranzitivă. Reflexivitatea este tot una cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitatea şi din simetria paralelismului între drepte: $\mathbf{D} \| \mathbf{D}' \Rightarrow \mathbf{D}' \| \mathbf{D}$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sunt egale sau paralele. ■

Pentru relaţia "aceeaşi direcţie" clasa de echivalenţă determinată de o dreaptă se numeşte direcţia dreptei respective. Altfel spus, o direcţie este o familie de drepte paralele, fiecare dreaptă din această familie fiind un reprezentant al direcţiei din care face parte.

Un segment orientat nenul determină unic dreapta suport. De aceea direcţia dreptei suport se poate ataşa direct segmentului orientat care determină dreapta.

Definiţia 6.1.2. *Două segmente orientate nenule au aceeaşi direcţie* *dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.*

Teorema 6.1.2. *Relaţia binară "aceeaşi direcţie" pentru segmente orientate nenule este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate nenule.*

Demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei precedente, cu menţiunea că în locul dreptelor se vor utiliza segmente orientate.

Pentru segmentele orientate nenule, direcţiile sunt clasele de echivalenţă ale dreptelor suport relativ la relaţia "aceeaşi direcţie". Admitem că direcţia unui segment orientat nul este nedeterminată.

Pe o dreaptă se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei, consecinţe ale axiomelor de ordine) pe care le notăm prin săgeţi. O dreaptă împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numeşte dreaptă orientată. Indicarea unui sens de parcurs pe una din dreptele paralele, ce definesc o direcţie, defineşte un sens pe toate dreptele familiei respective. O direcţie pentru care este dat un sens de parcurs pe dreptele familiei care o definesc se numeşte direcţie orientată. Un segment orientat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină unic dreapta AB şi sensul de parcurs pe această dreaptă este sensul de la A către B.

Definiţia 6.1.3. *Două segmente orientate nenule coliniare au "acelaşi sens" dacă sensurile determinate pe dreapta suport coincid (suportul comun).*

Două segmente orientate nenule paralele au "acelaşi sens" dacă extremităţile lor se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta care uneşte originile segmentelor în planul dreptelor suport paralele.

Teorema 6.1.3. *Relaţia binară "acelaşi sens", pentru segmente orientate nenule de aceeaşi direcţie, este o relaţie de echivalenţă.*

Pentru demonstraţie se va vedea demonstraţia dată teoremei 6.1.1.

Relaţia "acelaşi sens" implică relaţia "aceeaşi direcţie". De aceea există numai două clase de echivalenţă relativ la relaţia "acelaşi sens". Convenim să numim aceste clase sensuri: sensul impus de un segment orientat nenul fixat şi opusul său. De asemenea admitem că sensul unui segment orientat nul este nedeterminat.

O direcţie împreună cu unul dintre cele două sensuri posibile este o direcţie orientată.

Lungimea (norma sau modulul) unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ se defineşte ca fiind lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanţa de la punctul A la punctul B. Un segment orientat are lungimea zero dacă şi numai dacă el este segmentul nul. Două segmente neorientate care au aceeaşi lungime se numesc segmente congruente.

Definiţia 6.1.4. *Două segmente orientate au "aceeaşi lungime" dacă segmentele neorientate corespunzătoare sunt congruente.*

Teorema 6.1.4. *Relaţia binară "aceeaşi lungime" pentru segmente orientate, este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Relaţia de congruenţă este o relaţie de echivalenţă. ■

Relaţiile "aceeaşi direcţie", "aceeaşi sens", "aceeaşi lungime" pentru segmente orientate generează o nouă relaţie peste segmentele orientate. utilizată pentru definirea noţiunii de vector liber.

Definiţia 6.1.5. *Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au "aceeaşi direcţie", "aceeaşi sens" şi "aceeaşi lungime".*

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$, atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Se dovedeşte cu uşurinţă că $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$. Deoarece relaţia "acelaşi sens" implică relaţia "aceeaşi direcţie", echipolenţa este sinonim pentru "acelaşi sens" şi "aceeaşi lungime". Există însă suficiente probleme concrete care impun explicitarea unei direcţii fără a interesa sensul. De aceea am preferat definiţia clasică pentru echipolenţă deşi conţine şi elemente superflue.

Teorema 6.1.5. *Relaţia de echipolenţă pentru segmente orientate nenule este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţia se bazează pe teoremele 6.1.2.-4.

Prelungim relaţia de echipolenţă şi la segmentele orientate nule: admitem că toate segmentele orientate nule sunt echipolente între ele. Astfel, obţinem o relaţie de echipolenţă pe mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu care este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 6.1.6. *Clasele de echivalenţă ale segmentelor orientate relativ la relaţia de echipolenţă se numesc vectori liberi. Direcţia, sensul şi lungimea care sunt comune segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber.*

Notaţia 6.1.1. Vectorii liberi se notează prin $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$ în general, iar în desen prin unul dintre segmentele orientate echipolente ce definesc clasa numită vector liber, de exemplu $\overline{AB}, \overline{CD}, ...$, evident $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$ şi fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un reprezentant al clasei.

Notaţia 6.1.2. Pentru lungimea (norma) unui vector liber $\overline{a}$ sau $\overline{AB}$ se va folosi notaţia $\|\overline{a}\|$, $\left\|\overline{AB}\right\|$ sau $d\left(a, b\right)$.

Un vector liber de lungime unu se numeşte versor sau vector unitate şi se notează în general cu $\overline{e}$.

Vectorul liber care are lungimea zero se numeşte vector nul şi se notează cu $\overline{0}$. Acest vector este reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AA}$.

Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc coliniari. Doi vectori coliniari care au aceeaşi lungime dar sensuri opuse se numesc vectori opuşi ($\overline{a}$ are opusul pe $-\overline{a}$).

Doi vectori liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt egali şi se scrie $\overline{a} = \overline{b}$ dacă reprezentanţii lor sunt echipolenţi.

Fie $\mathcal{V}$ mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiul $\mathbf{E}_3$. Alegem în $\mathbf{E}_3$ un punct O numit origine. La orice punct M din $\mathbf{E}_3$ îi corespunde un vector şi numai unul $\overline{r} \in \mathcal{V}$ al cărui reprezentant este $\overrightarrow{OM}$. Reciproc, la orice vector $\overline{r}$ corespunde un punct şi numai unul M, astfel încât $\overrightarrow{OM}$ să reprezinte pe $\overline{r}$. Rezultă că mulţimile $\mathbf{E}_3$ şi $\mathcal{V}$ sunt în corespondenţă biunivocă, bijecţia fiind unic determinată de fixarea originii. Vectorul liber $\overline{r} = \overline{OM}$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului M faţă de originea O.

6.2 Operaţii cu vectori liberi.

a) Adunarea.

Mulţimea $\mathcal{V}$ a vectorilor din spaţiu se poate organiza ca un grup aditiv comutativ, definind adunarea prin regula triunghiului (regula paralelogramului).

Definiţia 6.2.1. *Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al vectorului $\overline{b}$. Vectorul liber $\overline{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numeşte suma vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi se notează $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ sau $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ (regula triunghiului).*

Vectorii $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ sunt vectori coplanari.

Adunarea vectorilor liberi "$+$" $: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \to \overline{a} + \overline{b}$ este o lege de compoziţie internă bine definită deoarece vectorul liber $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ nu depinde de alegerea punctului O.

Teorema 6.2.1. *Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*

1. *asociativitatea, adică*

$$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V},\ \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c};$$

2. $\overline{0}$ *este vectorul neutru, adică*

$$\forall \overline{a} \in \mathcal{V},\ \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a};$$

3. *opusul lui $\overline{a}$ este simetricul lui $\overline{a}$, adică*

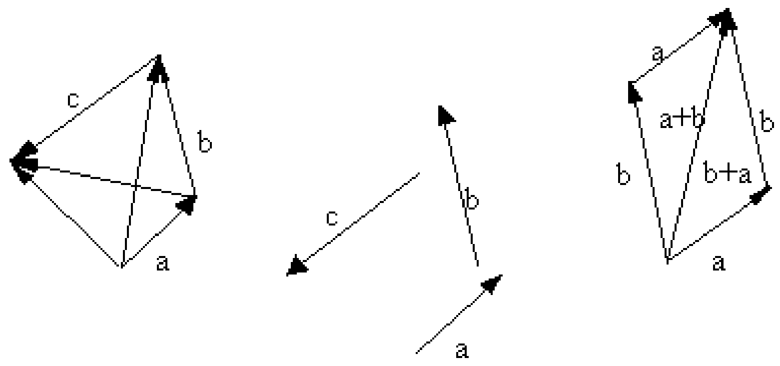
$$\forall \overline{a} \in \mathcal{V},\ \overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0};$$

4. *comutativitatea, adică*

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V},\ \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

Demonstraţie. Cazurile specifice coliniarităţii pot fi verificate cu uşurinţă.

1. Ţinem seama de definiţie şi de următoarea figură:



$\overrightarrow{OB}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\overline{a}+\overline{b}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}$; $\overrightarrow{AC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\overline{b}+\overline{c}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$. Rezultă

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right).$$

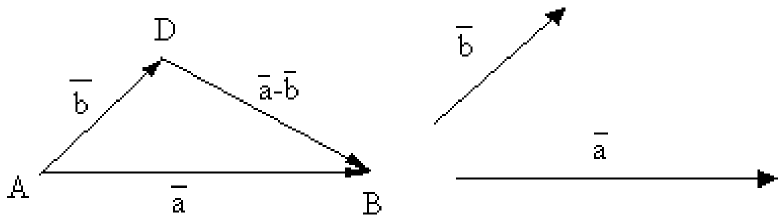
În mod analog se demonstrează şi proprietăţile 2.-4. ■

Comutativitatea adunării conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori necoliniari, numită regula paralelogramului: se reprezintă $\overrightarrow{AB}\in\overline{a}$, $\overrightarrow{AD}\in\overline{b}$ şi se fixează punctul C ca intersecţia dintre paralela la AB dusă prin D şi paralela dusă la AD prin B; segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\overline{a}+\overline{b}$.

Asociativitatea adunării permite generalizarea regulii triunghiului la regula poligonului strâmb, potrivită adunării a $n\geq 3$ vectori.

Proprietăţile 1.-3. arată că adunarea defineşte pe $\mathcal{V}$ o structură de grup, iar proprietatea 4. arată că acest grup este comutativ.

În grupul $\mathcal{V}$ ecuaţia $\overline{b}+\overline{x}=\overline{a}$ are o soluţie unică $\overline{x}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$ pe care o notăm $\overline{x}=\overline{a}-\overline{b}$ şi pe care o numim diferenţa dintre vectorul $\overline{a}$ şi vectorul $\overline{b}$. Dacă $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\overline{a}$, iar $\overrightarrow{AD}$ este reprezentantul lui $\overline{b}$, atunci reprezentantul lui $\overline{a}-\overline{b}$ este $\overrightarrow{DB}$.



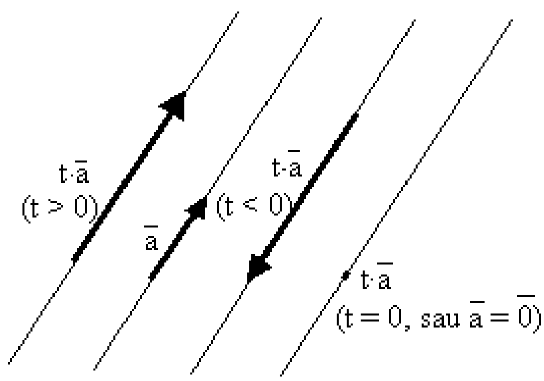
b) Înmulţirea unui vector cu un scalar.

Fie $\mathbf{R}$ corpul numerelor reale (corpul scalarilor) şi $\mathcal{V}$ grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi. Vom introduce o lege de compoziţie externă, adică o funcţie definită pe $\mathbf{R} \times \mathcal{V}$ cu valori în $\mathcal{V}$ numită înmulţirea unui vector liber cu un scalar.

Definiţia 6.2.2. *Fie $t \in \mathbf{R}$ şi $\overline{a} \in \mathcal{V}$. Prin $t\overline{a}$ înţelegem un vector liber definit astfel:*

1. *dacă $\overline{a} \neq \overline{0}$ şi $t \neq 0$, atunci $t\overline{a}$ este vectorul care are aceeaşi direcţie cu $\overline{a}$ dacă $t > 0$, sens contrar lui $\overline{a}$ dacă $t < 0$ şi lungimea egală cu $|t| \, \|\overline{a}\|$;*

2. *dacă $t = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$, atunci $t\overline{a} = \overline{0}$.*



Se observă că $t\overline{a}$ este coliniar cu $\overline{a}$.

Teorema 6.2.2. *Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăţi:*

1. $\forall \overline{a} \in \mathcal{V}$, $1\overline{a} = \overline{a}$;

2. $\forall s, t \in \mathbf{R}$, $\forall \overline{a} \in \mathcal{V}$, $s\,(t\overline{a}) = (st)\,\overline{a}$;

3. *distributivitatea faţă de adunarea scalarilor şi anume*

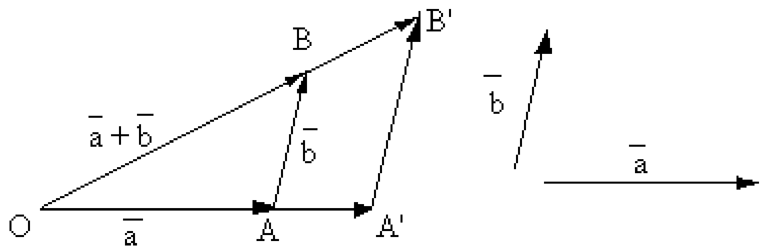
$$\forall s,t\in\mathbf{R},\ \forall\overline{a}\in\mathcal{V},\ \ (s+t)\,\overline{a}=s\overline{a}+t\overline{a}\ ;$$

4. *distributivitatea faţă de adunarea vectorilor, mai precis*

$$\forall t\in\mathbf{R},\ \forall\overline{a},\overline{b}\in\mathcal{V},\ \ t\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=t\overline{a}+t\overline{b}.$$

Demonstraţie. Pentru proprietăţile 1.-3. se utilizează condiţia de egalitate a doi vectori liberi.

4. Fie $\overrightarrow{OA}$ reprezentantul vectorului $\overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$ reprezentantul vectorului $\overline{b}$. Atunci $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul vectorului $\overline{a}+\overline{b}$.



Presupunem $t>0$ şi notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului $t\overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $t\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$. Se observă că $\Delta OAB\sim\Delta OA'B'$, având un unghi comun şi laturile (care determină acest unghi) proporţionale.Astfel $\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{A'B'}=t\overrightarrow{AB}$, adică $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului $t\overline{b}$. Deci $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $t\overline{a}+t\overline{b}$, adică $t\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=t\overline{a}+t\overline{b}$.

Cazul $t<0$ se tratează analog. ■

Proprietăţile adunării vectorilor liberi şi proprietăţile înmulţirii vectorilor liberi cu scalari arată că $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial peste câmpul numerelor reale.

c) Coliniaritate şi coplanaritate.

Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial real al vectorilor liberi. Presupunem cunoscute noţiunile de subspaţiu vectorial, dependenţă şi independenţă liniară, bază şi dimensiune, coordonate şi izomorfisme de spaţii vectoriale.

Teorema 6.2.3. *Fie $\overline{a},\overline{b}\in\mathcal{V}$. Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari şi $\overline{a}\neq\overline{0}$, atunci există un număr real t unic, astfel încât $\overline{b}=t\overline{a}$.*

Demonstraţie. $\overline{a}=\|\overline{a}\|\,\overline{a_0}$ $\left(\overline{a_0}\text{ este versorul lui }\overline{a},\ \overline{a_0}=\frac{1}{\|\overline{a}\|}\overline{a}\right)$, iar $\overline{b}=\left\|\overline{b}\right\|\overline{b_0}$ $\left(\overline{b_0}\text{ este versorul lui }\overline{b},\ \overline{b_0}=\frac{1}{\left\|\overline{b}\right\|}\overline{b}\right)$. Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari $\Rightarrow$ $\overline{a_0}$ şi

$\overline{b_0}$ sunt egali sau opuşi. Pentru $\overline{a_0} = \overline{b_0}$ are loc $\bar{b} = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$, deci $t = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$. Pentru $\overline{a_0} = -\overline{b_0}$ avem $\bar{b} = -\frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$, deci $t = -\frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$. ■

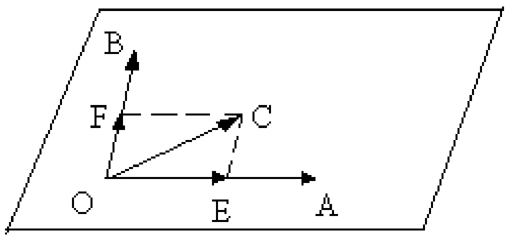
Consecinţa 6.2.1. *Mulţimea*

$$\mathcal{V}_1 = \left\{\bar{b} \in \mathcal{V} \mid \exists t \in \mathbf{R}, \text{astfel încât } \bar{b} = t\bar{a},\ \bar{a} \neq \bar{0}\right\}$$

a tuturor vectorilor coliniari cu un vector nenul $\bar{a}$, este un spaţiu vectorial unudimensional.

Teorema 6.2.4. *Vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă ei sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Presupunem că $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt liniar dependenţi, adică $\exists r, s, t \in \mathbf{R}$ cu $r^2 + s^2 + t^2 \neq 0$ astfel încât $r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} = \bar{0}$. Pentru $t \neq 0$ relaţia se transcrie $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, unde $\alpha = -\frac{r}{t}$ şi $\beta = -\frac{s}{t}$, rezultă că reprezentanţii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, ai vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ satisfac relaţia $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, adică $\overrightarrow{OC}$ se află în planul determinat de $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.



Raţionamentul reciproc este imediat.

Consecinţa 6.2.2. *Mulţimea*

$$\mathcal{V}_2 = \left\{\bar{c} \in \mathcal{V} \mid \exists r, s \in \mathbf{R},\ \bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b}; \bar{a}, \bar{b} \text{ necoliniari}\right\},$$

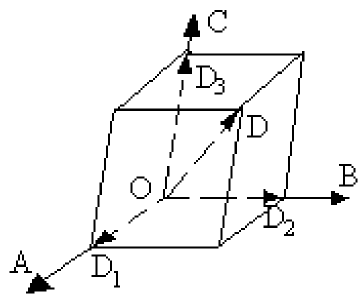
a tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori necoliniari $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, este un spaţiu vectorial bidimensional.

Demonstraţie. $\mathcal{V}_2$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$, iar $\left\{\bar{a}, \bar{b}\right\}$ este o mulţime liniar independentă care generează pe $\mathcal{V}_2$. Deoarece dependenţa liniară a trei vectori liberi este echivalentă cu coplanaritatea, rezultă că trei vectori liberi necoplanari sunt independenţi. ■

Teorema 6.2.5. *Spaţiul vectorial real al vectorilor liberi din* $\mathbf{E}_3$ *are dimensiunea* 3.

Demonstraţie. În $\mathcal{V}$ există trei vectori liniar independenţi şi anume oricare trei vectori necoplanari $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Arătăm că aceştia generează pe $\mathcal{V}$.

Fie $\overline{d}$ un al patrulea vector şi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ reprezentanţii vectorilor $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.



Se observă că $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ şi deci $\overline{d} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$. Dacă $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este o bază fixată în $\mathcal{V}_3$ şi r, s, t sunt coordonatele lui $\overline{d}$ în raport cu această bază. ■

Cu precădere în practică se foloseşte scrierea $\overline{d}\,(r, s, t)$ sau identificarea $\overline{d} = (r, s, t)$. În acest context pentru $\overline{d_i} = (r_i, s_i, t_i) \in \mathcal{V}_3$, $i = 1, 2, 3$ avem:

1. $\overline{d_1} = \overline{d_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2, s_1 = s_2, t_1 = t_2$;

2. $\overline{d_1} + \overline{d_2} = (r_1 + r_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2)$;

3. $k\overline{d_1} = (kr_1, ks_1, kt_1)$;

4. $\overline{d_1}$ este coliniar cu $\overline{d_2}$ dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale;

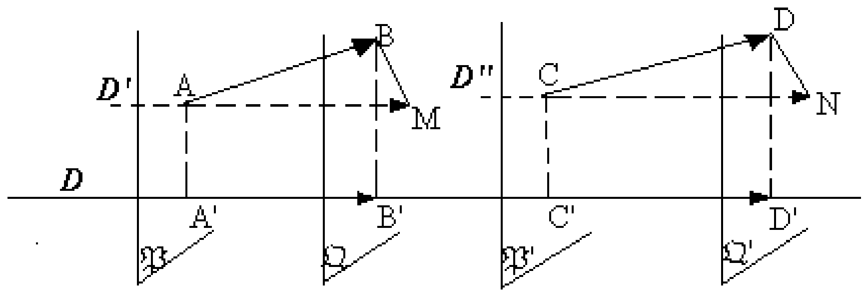
5. vectorii $\overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă coordonatele unuia sunt combinaţii liniare de coordonatele celorlalţi doi: de exemplu $r_3 = \alpha r_1 + \beta r_2$, $s_3 = \alpha s_1 + \beta s_2$, $t_3 = \alpha t_1 + \beta t_2$.

d) Proiecţia ortogonală.

Fie $\mathbf{D}$ o dreaptă şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$ un vector liber. Prin A şi B ducem planele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$ respectiv perpendiculare pe $\mathbf{D}$. Notăm $\{A'\} = \mathbf{D} \cap \mathcal{P}$, $\{B'\} = \mathbf{D} \cap \mathcal{Q}$.

Teorema 6.2.6. *Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ ce reprezintă pe $\overline{a}$.*

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{CD}$ un alt reprezentant al lui $\overline{a}$ şi $\overrightarrow{C'D'}$ construit după procedeul lui $\overrightarrow{A'B'}$. Arătăm că $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$.



Dacă se construieşte o dreaptă $\mathbf{D}'$ prin A şi o dreaptă $\mathbf{D}''$ prin C, astfel încât atât $\mathbf{D}'$ cât şi $\mathbf{D}''$sunt paralele cu $\mathbf{D}$. În aceste condiţii avem că segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{C'D'}$ au:

1. aceeaşi direcţie, deoarece ambele sunt situate pe dreapta $\mathbf{D}$;

2. au acelaşi sens deoarece punctele B', C' şi D' se găsesc în această ordine pe semidreapta determinată de A' pe dreapta $\mathbf{D}$;

3. au aceeaşi lungime deoarece $\Delta ABM \equiv \Delta CDN$ $\left(\left|\overrightarrow{AM}\right| \equiv \left|\overrightarrow{CN}\right| \equiv \left|\overrightarrow{A'B'}\right|, \left|\overrightarrow{AB}\right| \equiv \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)$şi în plus triunghiurile sunt dreptunghice.

Teorema este astfel demonstrată. ■

Definiţia 6.2.3. *Vectorul liber* $\overrightarrow{A'B'}$ *se numeşte proiecţia ortogonală a vectorului* $\overline{a}$ *pe dreapta* $\mathbf{D}$ *şi se notează* $\pi_{\mathbf{D}}(\overline{a})$.

Teorema 6.2.7. *Dacă* $\mathbf{D}_1$ *şi* $\mathbf{D}_2$ *sunt drepte paralele, atunci* $\pi_{\mathbf{D}_1}(\overline{a}) = \pi_{\mathbf{D}_2}(\overline{a})$.

Proiecţia ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă $\mathbf{D}$ depinde numai de direcţia lui $\mathbf{D}$. Dacă $\overline{u}$ este un vector nenul care dă direcţia lui $\mathbf{D}$, atunci putem vorbi de proiecţia ortogonală a lui $\overline{a}$ pe $\overline{u}$ pe care o notăm cu $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$. Arătăm că π este o transformare liniară.

Teorema 6.2.8. Fie $\overline{u} \in \mathcal{V}_3 \backslash \left\{\overline{0}\right\}$. Pentru orice $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}_3$ şi oricare scalar $t \in \mathbf{R}$ avem:

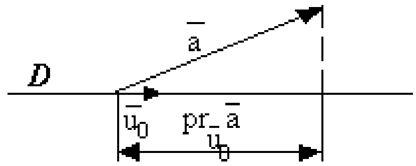
$\pi_{\overline{u}}\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \pi_{\overline{u}}(\overline{a}) + \pi_{\overline{u}}\left(\overline{b}\right)$;

$\pi_{\overline{u}}(t\overline{a}) = t\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$.

Demonstraţia acestei teoreme este imediată.

Notăm cu $\overline{u}$ un vector liber nenul şi $\overline{u_0}$ versorul său, adică $\overline{u} = \|\overline{u}\| \overline{u_0}$, $\|\overline{u_0}\| = 1$. Pentru orice $\overline{a}$, vectorul $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$ este coliniar cu $\overline{u_0}$ şi deci există un număr real $pr_{\overline{u}}\overline{a}$ astfel încât

$$\pi_{\overline{u}}(\overline{a}) = (pr_{\overline{u}}\overline{a})\, \overline{u_0}$$

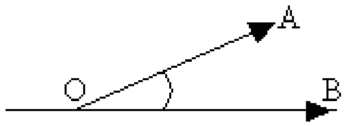


Definiţia 6.2.4. *Numărul real $pr_{\overline{u}}\overline{a}$ definit prin relaţia precedentă se numeşte mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$.*

Proprietăţile lui π implică:

$$pr_{\overline{u}}\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = pr_{\overline{u}}\overline{a} + pr_{\overline{u}}\overline{b} \,,$$
$$pr_{\overline{u}}(t\overline{a}) = tpr_{\overline{u}}\overline{a} \,.$$

Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overline{0}\}$ şi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ segmentele orientate reprezentative. Unghiul orientat (care se obţine "măturând" planul cu vectorul $\overrightarrow{OA}$ către $\overrightarrow{OB}$) $\varphi \in [0,\pi]$ determinat de $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ se numeşte unghiul dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.



Definiţia unghiului nu depinde de punctul O. Dacă cel puţin unul dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este $\overline{0}$, atunci unghiul $\varphi \in [0,\pi]$ dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este nedeterminat. Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se numesc ortogonali dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$. Acceptăm că $\overline{0}$ este ortogonal pe orice vector. Astfel:

$$pr_{\overline{u}}\overline{a} = \|\overline{a}\| \cos\varphi \ , \ \text{unde } \varphi = (\overline{u},\overline{a}) \,.$$

În mod analog cu proiecţia unui vector $\overline{a}$ pe o dreaptă **D** se obţine şi proiecţia aceluiaşi vector $\overline{a}$ pe un plan $\mathcal{P}$, cu menţiunea că planele perpendiculare construite iniţial în definiţia 6.2.3. vor fi transformate acum în drepte perpendiculare pe $\mathcal{P}$. Această proiecţie se notează cu $\pi_{\mathcal{P}}(\overline{a})$ şi se arată că şi ea este o transformare liniară.

e) Produs scalar.

Noţiunea de produs scalar o presupunem cunoscută de la partea de algebră liniară.

Fie $\mathcal{V}_3$ spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}_3$. Pentru $\overline{a} \neq \overline{0}$ şi $\overline{b} \neq \overline{0}$, notăm cu $\varphi \in [0,\pi]$ unghiul neorientat dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Teorema 6.2.9. *Funcţia* $(.,.) : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \begin{cases} \|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\| \cos\varphi \text{pentru } \overline{a} \neq \overline{0} \text{şi } \overline{b} \neq \overline{0} \\ 0 \text{pentru } \overline{a} = \overline{0} \text{şi/sau } \overline{b} = \overline{0}, \end{cases}$$

este un produs scalar pe $\mathcal{V}_3$.

Demonstraţie. Trebuie să verificăm comutativitatea, distributivitatea faţă de adunare şi pozitivitatea funcţiei $(.,.)$.

Dovedim numai distributivitatea faţă de adunare $\left(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{b}\right) + (\overline{a}, \overline{c})$.

Cazul $\overline{a} = \overline{0}$ este imediat. Pentru a verifica proprietatea în ipoteza $\overline{a} \neq \overline{0}$ ne folosim de noţiunea de mărime algebrică a unei proiecţii ortogonale. Fie $\overline{e}$ un versor şi $\overline{b}$ un vector oarecare. Are loc $pr_{\overline{e}}\overline{b} = \left(\overline{e}, \overline{b}\right)$. Exprimăm pe $\overline{a} \neq \overline{0}$ în forma $\overline{a} = \|\overline{a}\| \overline{e}$, $\|\overline{e}\| = 1$. Relaţia $pr_{\overline{e}}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = pr_{\overline{e}}\overline{b} + pr_{\overline{e}}\overline{c}$ se rescrie $\left(\overline{e}, \overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{e}, \overline{b}\right) + (\overline{e}, \overline{c})$. Înmulţind cu $\|\overline{a}\|$ şi ţinând seama de omogenitate avem $\left(\|\overline{a}\| \overline{e}, \overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\|\overline{a}\| \overline{e}, \overline{b}\right) + (\|\overline{a}\| \overline{e}, \overline{c})$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţia 6.2.1. $\mathcal{V}_3$ este un spaţiu vectorial euclidian.

Observaţia 6.2.2. Relaţia $(\overline{a}, \overline{a}) = \|\overline{a}\|^2 \geq 0$ este echivalentă cu $\|\overline{a}\| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$, ceea ce ne permite calculul lungimii vectorului liber $\overline{a}$ dacă se cunoaşte produsul scalar $(\overline{a}, \overline{a})$.

Observaţia 6.2.3. Relaţia $|\cos\varphi| \leq 1$ implică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz

$$\left|\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right| \leq \|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\|.$$

Observaţia 6.2.4. Doi vectori liberi sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.

Fie $\left\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right\}$ o bază în $\mathcal{V}_3$ şi $\overline{u} = r_1\overline{a} + s_1\overline{b} + t_1\overline{c}$, $\overline{v} = r_2\overline{a} + s_2\overline{b} + t_2\overline{c}$. Proprietăţile produsului scalar implică

$$\begin{aligned} (\overline{u}, \overline{v}) &= \left(r_1\overline{a} + s_1\overline{b} + t_1\overline{c}, r_2\overline{a} + s_2\overline{b} + t_2\overline{c}\right) = ... = \\ &= r_1r_2(\overline{a}, \overline{a}) + r_1s_2\left(\overline{a}, \overline{b}\right) + r_1t_2(\overline{a}, \overline{c}) + ... + t_1t_2(\overline{c}, \overline{c}). \end{aligned}$$

Deci produsul scalar $(\overline{u}, \overline{v})$ este cunoscut dacă se dă următorul tabel:

$(.,.)$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
$\overline{a}$	$(\overline{a}, \overline{a})$	$\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$	$(\overline{a}, \overline{c})$
$\overline{b}$	$\left(\overline{b}, \overline{a}\right)$	$\left(\overline{b}, \overline{b}\right)$	$\left(\overline{b}, \overline{c}\right)$
$\overline{c}$	$(\overline{c}, \overline{a})$	$\left(\overline{c}, \overline{b}\right)$	$(\overline{c}, \overline{c})$

Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul anterior să fie cât mai simplu. Un exemplu îl constituie baza ortonormată a cărei existenţă în $\mathcal{V}_3$ este uşor de observat. O bază în $\mathcal{V}_3$ formată din versori ortogonali se numeşte bază ortonormată şi se notează $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$. Coordonatele unui vector în raport cu o bază ortonormată se numesc coordonate euclidiene

$(.,.)$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

Dacă $\overline{a}=r_1\overline{i}+s_1\overline{j}+t_1\overline{k}, \overline{b}=r_2\overline{i}+s_2\overline{j}+t_2\overline{k}$. Tabelul precedent ne conduce la $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=r_1r_2+s_1s_2+t_1t_2$, unde $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt vectori liberi din $\mathcal{V}_3$. În particular $\left(\overline{a},\overline{i}\right)=r_1, \left(\overline{a},\overline{j}\right)=s_1, \left(\overline{a},\overline{k}\right)=t_1$; astfel coordonatele euclidiene ale unui vector $\overline{a}$ sunt de fapt mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale lui $\overline{a}$ pe cele trei axe de coordonate.

Dacă se cunosc coordonatele euclidiene ale unui vector $\overline{a}$, atunci norma sa este

$$\|\overline{a}\|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}=\sqrt{r_1^2+s_1^2+t_1^2}.$$

Unghiul a doi vectori nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este dat de

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\|\overline{a}\|\left\|\overline{b}\right\|}=\frac{r_1r_2+s_1s_2+t_1t_2}{\sqrt{r_1^2+s_1^2+t_1^2}\sqrt{r_2^2+s_2^2+t_2^2}},$$

unde $\varphi\in[0,\pi]$. Astfel avem că $\overline{a}\perp\overline{b}$ dacă şi numai dacă $r_1r_2+s_1s_2+t_1t_2=0$.

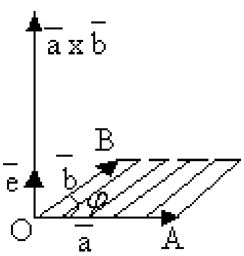
f) Produs vectorial.

Fie $\mathcal{V}_3$ spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a},\overline{b}\in\mathcal{V}_3$. Pentru $\overline{a}\neq\overline{0}$ şi $\overline{b}\neq\overline{0}$, notăm cu $\varphi\in[0,\pi]$ unghiul orientat dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Definiţia 6.2.5. *Vectorul*

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{cases}\|\overline{a}\|\left\|\overline{b}\right\|\sin\varphi\ \overline{e}, \textit{pentru } \overline{a} \textit{şi } \overline{b} \textit{necoliniari}\\ \overline{0}, \textit{pentru } \overline{a},\overline{b} \textit{coliniari,}\end{cases}$$

unde $\overline{e}$ este un versor perpendicular pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi cu sensul dat de regula mâinii drepte pentru tripletul $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{e}\right)$, se numeşte produsul vectorial dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.



Produsul vectorial este o aplicaţie biliniară definită pe $\mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3$ cu valori în $\mathcal{V}_3$.

Teorema 6.2.10. *Pornind de la definiţia produsului vectorial se deduc următoarele proprietăţi:*

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}_3$ *(anticomutativitate datorată tocmai orientării unghiului dintre cei doi vectori);*

2. $t\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = (t\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(t\bar{b}\right)$, $\forall t \in \mathbf{R}$ *şi* $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}_3$;

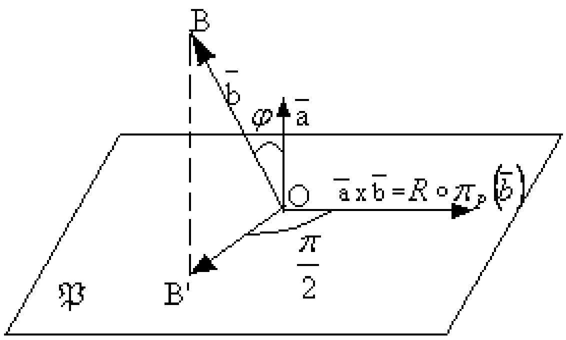
3. $\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{V}_3$ *(distributivitatea produsului vectorial faţă de adunarea vectorilor);*

4. $\bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$ $\forall \bar{a} \in \mathcal{V}_3$;

5. $\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\|^2 = \|\bar{a}\|^2 \left\|\bar{b}\right\|^2 - \left(\bar{a}, \bar{b}\right)^2$ *(identitatea lui Lagrange);*

6. *produsul vectorial a doi vectori nenuli* $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}_3$ *este nul dacă şi numai dacă vectorii* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *sunt coliniari; dacă* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *nu sunt coliniari atunci norma* $\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\|$ *reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii* $\overrightarrow{OA}$ *şi* $\overrightarrow{OB}$.

Demonstraţie. Proprietăţile 1,2,4,6, se demonstrează fără dificultate folosind definiţia produsului vectorial. Pentru a demonstra proprietatea 3. ne folosim de 2. şi de proprietăţile înmulţirii unui vector cu un număr. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $\bar{a}$ este un versor; fie $\mathcal{P}$ un plan perpendicular pe $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ un vector reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$, a cărui direcţie face un unghi orientat φ cu direcţia lui $\bar{a}$.



Fie B' proiecţia lui B pe planul $\mathcal{P}$. Vectorul reprezentat de $\overrightarrow{OB'}$ îl notăm cu $\pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right)$. Este cunoscut faptul că dacă $\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{V}_3$ are loc $\pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right) + \pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{c}\right)$. Notăm cu $\mathcal{R}$ rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei lui $\bar{a}$. Oricare ar fi vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ din planul $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}\left(\bar{v} + \bar{w}\right) = \mathcal{R}\left(\bar{v}\right) + \mathcal{R}\left(\bar{w}\right)$. Din figura anterioară se observă că $\bar{a} \times \bar{b} = \mathcal{R} \circ \pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right)$ (funcţia vectorială $\pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right)$). Adevărat, $\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\| = \left\|\mathcal{R} \circ \pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right)\right\| = \left\|\bar{b}\right\| \sin\varphi$, iar tripletul $\left(\bar{a}, \bar{b}, \mathcal{R} \circ \pi_{\mathcal{P}}\left(\bar{b}\right)\right)$ este orientat după regula mâinii drepte.

Analog $\overline{a}\times\overline{c} = \mathcal{R}\circ\pi_{\mathcal{P}}(\overline{c})$ şi $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \mathcal{R}\circ\pi_{\mathcal{P}}\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$. Având în vedere proprietăţile proiecţiei ortogonale, are loc

$$\mathcal{R}\circ\pi_{\mathcal{P}}\left(\overline{b}\right) + \mathcal{R}\circ\pi_{\mathcal{P}}(\overline{c}) = \mathcal{R}\circ\pi_{\mathcal{P}}\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$$

şi deci proprietatea este demonstrată.

Pentru a obţine identitatea Lagrange pornim de la egalitatea $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$, pe care o înmulţim cu $\|\overline{a}\|^2\left\|\overline{b}\right\|^2$. ■

În raport cu baza $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ admit descompunerea $\overline{a} = r_1\overline{i}+s_1\overline{j}+t_1\overline{k}, \overline{b} = r_2\overline{i}+s_2\overline{j}+t_2\overline{k}$. Folosind definiţia produsului vectorial şi proprietăţile 1,2,3,6, se obţine

$$\begin{array}{cccc}
\times & \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\
\overline{i} & \overline{0} & \overline{k} & -\overline{j} \\
\overline{j} & -\overline{k} & \overline{0} & \overline{i} \\
\overline{k} & \overline{j} & -\overline{i} & \overline{0}
\end{array}$$

care ne conduce la

$$\overline{a}\times\overline{b} = (s_1t_2-s_2t_1)\,\overline{i} + (r_2t_1-r_1t_2)\,\overline{j} + (r_1s_2-r_2s_1)\,\overline{k}$$

sau simbolic

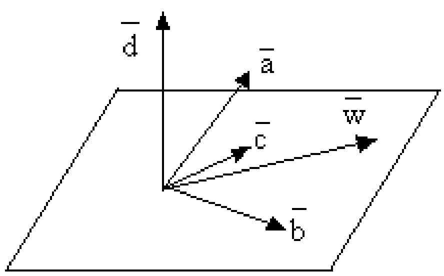
$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

g) Dublul produs vectorial.

Fiind daţi vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, vectorul $\overline{w} = \overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$ este dublul produs vectorial al acestor vectori. Folosind baza ortonormată $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ precum şi proprietăţile produsului scalar şi vectorial, are loc

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right) = \overline{b}\,(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

Această relaţie pune în evidenţă coplanaritatea vectorilor $\overline{w},\overline{b},\overline{c}$, unde $\overline{d} = \overline{b}\times\overline{c}$ şi $\overline{w}\perp\overline{a}, \overline{w}\perp\overline{d}$.



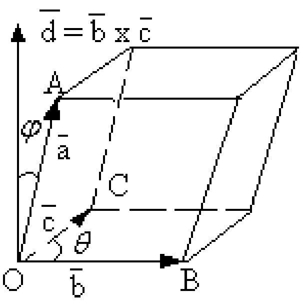
Observaţia 6.2.5. $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) \neq (\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$.

Observaţia 6.2.6. Expresia dublului produs vectorial se reţine mai uşor scrisă sub forma determinantului simbolic

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \overline{b} & \overline{c} \\ (\overline{a}, \overline{b}) & (\overline{a}, \overline{c}) \end{vmatrix}.$$

h) Produs mixt.

Fiind daţi vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, numărul $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c})$ se numeşte produsul mixt al acestor vectori. Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi pe reprezentanţii cu originea comună ai celor trei vectori



Dacă notăm cu θ unghiul dintre direcţiile vectorilor $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ şi cu φ unghiul dintre direcţiile vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b} \times \overline{c}$; atunci

$$(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{d}) = \|\overline{a}\| \left\|\overline{d}\right\| \cos\varphi = \left\|\overline{b} \times \overline{c}\right\| pr_{\overline{d}}\overline{a} = \pm V_{paralelipipedului}.$$

Teorema 6.2.11. *Au loc următoarele proprietăţi:*

1. $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a} \times \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c} \times \overline{a})$ $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V}_3$;

2. $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c} \times \overline{b})$ $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V}_3$;

3. $(t\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, t\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b} \times t\overline{c})$ $\forall t \in \mathbf{R}$ *şi* $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V}_3$;

4. $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a_1}, \overline{b} \times \overline{c}) + (\overline{a_2}, \overline{b} \times \overline{c})$ $\forall\ \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V}_3$;

5. $(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}) = \begin{vmatrix} (\overline{a}, \overline{c}) & (\overline{a}, \overline{d}) \\ (\overline{b}, \overline{c}) & (\overline{b}, \overline{d}) \end{vmatrix}$ $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathcal{V}_3$ *(identitatea lui Lagrange);*

6. $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = 0$, *dacă şi numai dacă :*

i) *cel puţin unul dintre vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *este nul;*

ii) *doi dintre vectori sunt coliniari;*

iii) *vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *sunt coplanari.*

Demonstrăm proprietatea 5, restul putând fi demonstrate cu uşurinţă folosind definiţiile şi proprietăţile produsului scalar, produsului vectorial şi înmulţirea unui vector cu un scalar. Notăm cu $\overline{m} = \overline{c} \times \overline{d}$ şi proprietatea 5. devine

$$\begin{aligned} &\left(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}\right) = \left(\overline{a} \times \overline{b}, \overline{m}\right) = \left(\overline{m}, \overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{m} \times \overline{a}\right) = \\ &= \left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{m}\right) = \left(\overline{a}, \overline{b} \times \left(\overline{c} \times \overline{d}\right)\right) = \left[\overline{a}, \overline{c}\left(\overline{b}, \overline{d}\right) - \overline{d}\left(\overline{b}, \overline{c}\right)\right] = \\ &= \left(\overline{a}, \overline{c}\right)\left(\overline{b}, \overline{d}\right) - \left(\overline{a}, \overline{d}\right)\left(\overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} \left(\overline{a}, \overline{c}\right) & \left(\overline{a}, \overline{d}\right) \\ \left(\overline{b}, \overline{c}\right) & \left(\overline{b}, \overline{d}\right) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

■

Dacă

$$\overline{a} = r_1\overline{i} + s_1\overline{j} + t_1\overline{k}, \overline{b} = r_2\overline{i} + s_2\overline{j} + t_2\overline{k}, \overline{c} = r_3\overline{i} + s_3\overline{j} + t_3\overline{k},$$

în coordonate produsul mixt se scrie

$$\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

Astfel, proprietăţile produsului mixt se pot justifica cu ajutorul proprietăţilor determinanţilor. Baza vectorială $\left\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right\}$ se numeşte orientată pozitiv (negativ) dacă produsul $\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right)$ este pozitiv (negativ). Prin urmare, baza ortonormată $\left\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\}$ este orientată pozitiv întrucât $\left(\overline{i}, \overline{j} \times \overline{k}\right) = 1$, unde $\overline{i} = (1, 0, 0), \overline{j} = (0, 1, 0), \overline{k} = (0, 0, 1)$.

6.3 Schimbări de repere carteziene.

Definiţia 6.3.1. *O funcţie surjectivă $\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ care păstrează distanţa euclidiană, adică*

$$d\left(\mathcal{F}\left(\overline{x}\right), \mathcal{F}\left(\overline{y}\right)\right) = d\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{V}$$

se numeşte izometrie.

Mulţimea izometriilor formează grup, cu ajutorul căruia introducem în spaţiul punctual $\mathbf{E}_3$ noţiunea de congruenţă a figurilor.

Izometriile de bază sunt rotaţia, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct şi translaţia.

Rotaţiile şi simetriile se mai numesc şi transformări ortogonale, ele fiind aplicaţii liniare date prin matrici ortogonale.

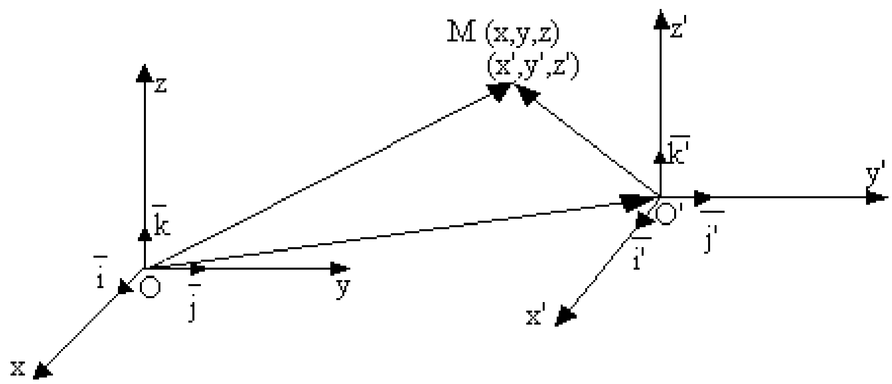
Orice izometrie este de forma $\mathcal{I} = \mathcal{T} \circ \mathcal{O}$, unde $\mathcal{T}$ este o translaţie, iar $\mathcal{O}$ este o transformare ortogonală.

Fie $\mathcal{I} = \mathcal{T} \circ \mathcal{O}$ o izometrie determinată de reperele $\mathcal{R} = \left\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\}$ şi $\mathcal{R}' = \left\{O', \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$. Izometria $\mathcal{I}$ se numeşte pozitivă (deplasare) dacă baza $\left\{\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$ este orientată pozitiv şi negativă (antideplasare) în caz contrar.

Principalele izometrii pozitive sunt translaţiile şi rotaţiile, iar principalele izometrii negative sunt simetria în raport cu un plan şi simetria în raport cu un punct.

a) Translaţia.

Definiţia 6.3.2. *Translaţia unui sistem de axe de coordonate $Oxyz$ este deplasarea sistemului astfel ca axele noului sistem $O'x'y'z'$ să rămână paralele cu axele vechi şi de acelaşi sens.*



Prin urmare reperul $\left\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\}$ supus translaţiei $\mathcal{T}$ devine $\left\{O', \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$, unde $O'(a, b, c)$ şi $O' = \mathcal{T}(O)$, $\overline{i'} = \mathcal{T}\left(\overline{i}\right) = \overline{i}$, $\overline{j'} = \mathcal{T}\left(\overline{j}\right) = \overline{j}$, $\overline{k'} = \mathcal{T}\left(\overline{k}\right) = \overline{k}$. Ne propunem să stabilim relaţiile între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ şi coordonatele x', y', z' ale aceluiaşi punct raportat la sistemul translatat $O'x'y'z'$.

Se observă că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Scrisă în coordonate, această relaţie vectorială devine

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k} + x'\overline{i} + y'\overline{j} + z'\overline{k} \ ,$$

de unde

$$\begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b, \\ z' &= z - c. \end{aligned}$$

Scrierea matricială a acestor relaţii este

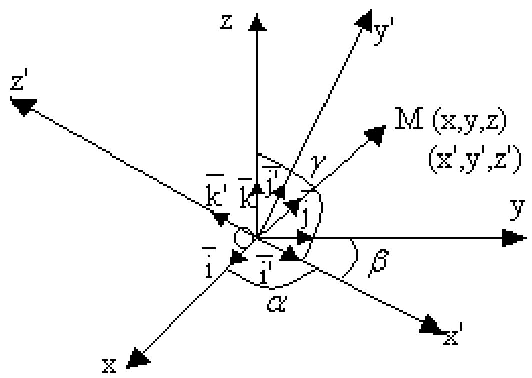
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Evident translaţia este o izometrie pozitivă.

Caz particular. Translaţia în planul xOy este dată de relaţiile $x' = x - a$, $y' = y - b$.

b) Rotaţia.

Fie în $\mathbf{E}_3$ două repere carteziene $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$, $\left\{O', \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$ care au originea comună O.



Cunoscând coordonatele versorilor $\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}$ faţă de baza **B**= $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ şi coordonatele (x, y, z) ale punctului M în raport cu primul reper, ne propunem să găsim coordonatele (x', y', z') ale punctului M în raport cu al doilea reper.

Se observă că o asemenea schimbare de repere în $\mathbf{E}_3$ este echivalentă cu trecerea de la baza ortonormată **B**= $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ la baza ortonormată **B'**= $\left\{\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$ din $\mathcal{V}_3$. În baza rezultatelor anterioare avem

$$\begin{aligned} \overline{i'} &= \mathcal{O}\left(\bar{i}\right) = \left(\overline{i'}, \bar{i}\right)\bar{i} + \left(\overline{i'}, \bar{j}\right)\bar{j} + \left(\overline{i'}, \bar{k}\right)\bar{k}, \\ \overline{j'} &= \mathcal{O}\left(\bar{j}\right) = \left(\overline{j'}, \bar{i}\right)\bar{i} + \left(\overline{j'}, \bar{j}\right)\bar{j} + \left(\overline{j'}, \bar{k}\right)\bar{k}, \\ \overline{k'} &= \mathcal{O}\left(\bar{k}\right) = \left(\overline{k'}, \bar{i}\right)\bar{i} + \left(\overline{k'}, \bar{j}\right)\bar{j} + \left(\overline{k'}, \bar{k}\right)\bar{k}. \end{aligned}$$

Notăm $a_{11} = \left(\overline{i'}, \bar{i}\right), a_{21} = \left(\overline{i'}, \bar{j}\right), a_{31} = \left(\overline{i'}, \bar{k}\right), a_{12} = \left(\overline{j'}, \bar{i}\right), a_{22} = \left(\overline{j'}, \bar{j}\right), a_{32} = \left(\overline{k'}, \bar{i}\right), a_{13} = \left(\overline{k'}, \bar{i}\right), a_{23} = \left(\overline{k'}, \bar{j}\right), a_{33} = \left(\overline{k'}, \bar{k}\right)$ şi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricea A este matricea de trecere de la baza **B**= $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza **B'**= $\{\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$ şi este o matrice ortogonală. Într-adevăr, $\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}$ fiind versori (coordonatele lor sunt cosinusuri directoare) reciproc ortogonali, deducem $A^tA = I$.

Ultima relaţie implică $(\det A)(\det A^t) = 1$, deci $(\det A)^2 = 1$, adică $\det A = \pm 1$. De aceea relaţia $A^tA = I$ este echivalentă cu $A^t = A^{-1}$. Rezultă că trecerea de la baza ortonormată **B**= $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza ortonormată **B'**= $\{\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$ se face cu ajutorul matricii ortogonale A, iar trecerea inversă se face cu A^t. Pentru a stabili relaţia de legătură între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ şi coordonatele x', y', z' ale aceluiaşi punct raportat la sistemul $Ox'y'z'$, observăm că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ sau echivalent

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'} + z'\overline{k'} \ .$$

De aceea

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

sau

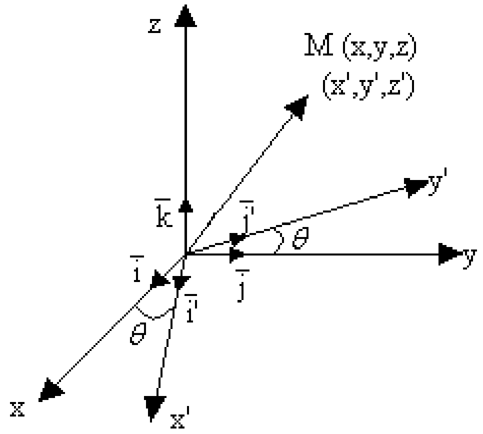
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Invers, avem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Aceste relaţii caracterizează o izometrie care păstrează originea. O astfel de izometrie dată de relaţiile anterioare se numeşte transformare ortogonală şi se notează cu $\mathcal{O}$. Deoarece $\left(\overline{i'}, \overline{j'} \times \overline{k'}\right) = \det A$, rezultă că o asemenea izometrie este pozitivă dacă $\det A = +1$ (rotaţie) şi negativă dacă $\det A = -1$ (rotaţie şi simetrie).

Exemplul 6.3.1. Rotaţia în jurul lui Oz. În reperul cartezian $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm rotaţia $\mathcal{R}$ de axă Oz şi de unghi θ.



$$\begin{aligned}\overline{i'} &= \mathcal{R}\left(\overline{i}\right) = \cos\theta\ \overline{i} + \sin\theta\ \overline{j}\ ,\\ \overline{j'} &= \mathcal{R}\left(\overline{j}\right) = -\sin\theta\ \overline{i} + \cos\theta\ \overline{j}\ ,\\ \overline{k'} &= \mathcal{R}\left(\overline{k}\right) = \overline{k}\ .\end{aligned}$$

Astfel din relaţia $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'} + z'\overline{k'}$, găsim

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ ,\\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta\ ,\\ z = z'\ . \end{cases}$$

Matricea lui $\mathcal{R}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

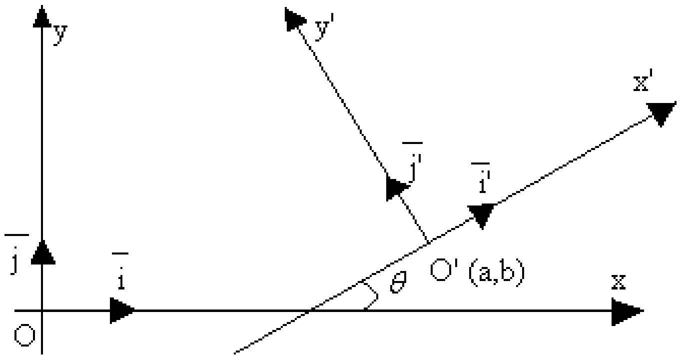
iar $\det A = +1$ şi deci $\mathcal{R}$ este o izometrie pozitivă.

În particular, o rotaţie în planul xOy, de unghi θ, în jurul originii este caracterizată prin

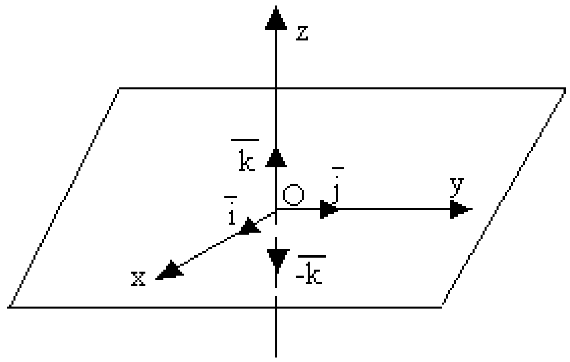
$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ ,\\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta\ . \end{cases}$$

Dintre izometriile în plan reţinem roto-translaţia caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ + a\ ,\\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b\ . \end{cases}$$



Exemplul 6.3.2. Simetria faţă de un plan. Fie reperul ortonormat $\left\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right\}$ şi $\mathcal{S}$ simetria în raport cu planul $\left(O,\bar{i},\bar{j}\right)$.



$$\begin{cases} \overline{i'} = \mathcal{S}\left(\bar{i}\right) = \bar{i}\ , \\ \overline{j'} = \mathcal{S}\left(\bar{j}\right) = \bar{j}\ , \\ \overline{k'} = \mathcal{S}\left(\bar{k}\right) = -\bar{k}\ . \end{cases}$$

Astfel, din $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} = x'\overline{i'}+y'\overline{j'}+z'\overline{k'}$, găsim $\mathcal{S}: x = x'$, $y = y'$, $z = -z'$, sau scris matriceal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricii lui $\mathcal{S}$ este -1 şi deci $\mathcal{S}$ este o izometrie negativă.

Capitolul 7

Dreapta şi planul.

7.1 Reper cartezian.

Este cunoscut faptul că spaţiile $\mathbf{E}_3$ şi $\mathcal{V}_3$ sunt în corespondenţă biunivocă, bijecţia fiind unic determinată prin fixarea originii, iar spaţiile vectoriale $\mathcal{V}_3$ şi $\mathbf{E}_3$ sunt izomorfe, izomorfismul fiind unic determinat prin fixarea bazelor în cele două spaţii.

Într-adevăr, în ipoteza că am fixat un punct O numit originea în $\mathbf{E}_3$ şi o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în $\mathcal{V}_3$, fiecărui punct M din $\mathbf{E}_3$ îi corespunde în mod unic un vector $\bar{r} = \overline{OM}$ numit vector de poziţie al punctului M; aceluiaşi vector îi corespunde în mod unic tripletul ordonat de numere reale $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ numite coordonatele euclidiene ale vectorului $\overline{OM}$ în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; se scrie $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

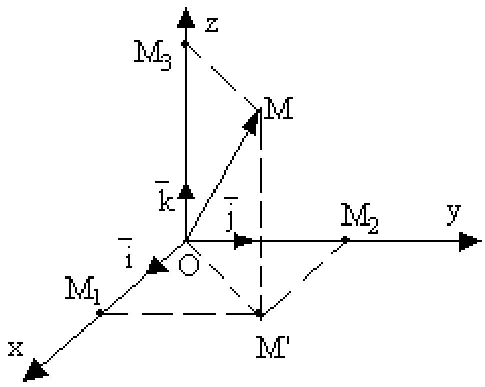
Ansamblul riguros orientat (în sensul că pentru determinarea vectorilor lui se aplică regula burghiului) $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numeşte reper cartezian în $\mathbf{E}_3$. Punctul O se numeşte originea reperului, iar $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numeşte baza reperului. Coordonatele euclidiene (x, y, z) ale vectorului de poziţie $\bar{r} = \overline{OM}$ se numesc coordonatele carteziene ale punctului M faţă de reperul ortonormat $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; $x = (\bar{i}, \bar{r}) = pr_{\bar{i}}\bar{r}$ =abscisa, $y = (\bar{j}, \bar{r}) = pr_{\bar{j}}\bar{r}$ =ordonata, $z = (\bar{k}, \bar{r}) = pr_{\bar{k}}\bar{r}$ =cota.

Bijecţia dintre $\mathbf{E}_3$ şi $\mathbf{R}_3$ determinată prin fixarea reperului cartezian se numeşte sistem de coordonate cartezian şi se notează prin $M(x, y, z)$.

Bijecţiile menţionate anterior permit deseori identificarea spaţiilor $\mathbf{E}_3, \mathcal{V}_3$ şi $\mathbf{R}^3$.

Versorilor ortogonali $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ le ataşăm axele de coordonate Ox, Oy, Oz care au acelaşi sens cu sensul pozitiv al acestor vectori.

Coordonatele carteziene ale punctului M reprezintă mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale vectorului $\overline{OM}$ pe cele trei axe de coordonate.



Axele sunt caracterizate respectiv prin ecuaţiile

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad Oy : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Cele trei axe determină trei plane xOy, xOz, yOz numite plane de coordonate. Ele sunt caracterizate respectiv prin

$$xOy : z = 0,\ yOz : x = 0,\ zOx : y = 0.$$

Cele trei plane de coordonate împart spaţiul în opt regiuni numite octante.

Uneori reperul cartezian este indicat prin notaţia $Oxyz$, prin aceasta înţelegându-se că s-a fixat originea O şi axele reciproc ortogonale Ox, Oy, Oz. Evident versorii reciproc ortogonali $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ rezultă din context.

În cele ce urmează presupunem cunoscute din geometria euclidiană noţiunile elementare ca punct, dreaptă, plan, perpendiculară etc.; de asemenea presupunem că $\mathcal{V}_3$ este raportat la baza ortonormată $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, iar $\mathbf{E}_3$ la reperul cartezian $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

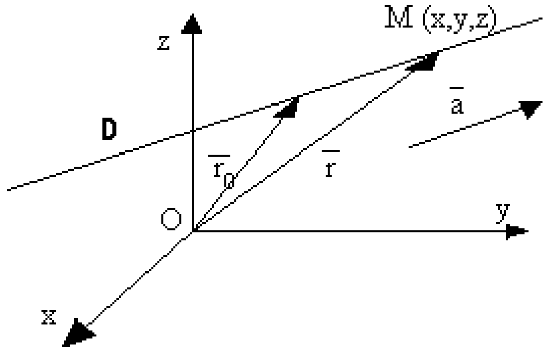
7.2 Dreapta în spaţiu.

O dreaptă în spaţiu poate fi determinată de:

i) un punct şi un vector nenul;
ii) două puncte;
iii) intersecţia a două plane.

a) Dreapta determinată de un punct şi un vector nenul.

Fie punctul fixat $M_0\,(x_0, y_0, z_0)\,,\ \overline{r_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$ şi fie un vector nenul $\overline{a}\,(l, m, n)$ din $\mathcal{V}_3$ şi $\mathbf{D}$ o dreaptă care trece prin M_0 şi are direcţia lui $\overline{a}$.



Punctul $M(x,y,z)$ aparţine dreptei **D** determinată de M_0 şi $\overline{a}$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$ sunt coliniari, adică

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \times \overline{a} = \overline{0}.$$

Această ecuaţie în $\mathcal{V}_3$ se numeşte ecuaţia vectorială a dreptei definită de un punct şi o direcţie. Vectorul $\overline{a}(l,m,n) \neq \overline{0}$, care dă direcţia dreptei **D** se numeşte vector director, iar coordonatele sale l,m,n se numesc parametrii directori ai dreptei.

Se observă că orice vector $k\overline{a}$, $k \neq 0$ joacă acelaşi rol cu $\overline{a}$.

Coliniaritatea vectorilor $\overline{r} - \overline{r_0}$ şi $\overline{a}$ se pune în evidenţă şi prin relaţia $\overline{r} - \overline{r_0} = t\overline{a}$, $t \in \mathbf{R}$ sau

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a},\ t \in \mathbf{R}.$$

Această ecuaţie vectorială este echivalentă cu trei ecuaţii în $\mathbf{R}^3$,

$$x = x_0 + tl,\ y = y_0 + tm,\ z = z_0 + tn,\ t \in \mathbf{R}$$

numite ecuaţiile parametrice ale dreptei **D**. Aceste ecuaţii se pot înlocui cu două ecuaţii carteziene în $\mathbf{R}^3$,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Deoarece $\overline{a}(l,m,n) \neq \overline{0}(0,0,0)$, cel mult două dintre numerele l,m,n se pot anula.

Observaţia 7.2.1. Dacă $l = 0$, $mn \neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene sunt echivalente cu

$$x = x_0,\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu planul yOz.

Observaţia 7.2.2. Dacă $l = m = 0$, $n \neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene se reduc la

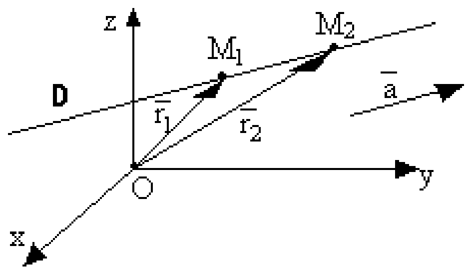
$$x = x_0, \ y = y_0$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz.

b) Dreapta determinată de două puncte.

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o dreaptă **D** şi numai una.

Pentru a scrie ecuaţiile acestei drepte ne folosim de cazul precedent; anume vom considera dreapta ca fiind determinată de punctul M_1 şi de vectorul director $\overline{a}$ reprezentat de $\overline{M_1M_2}$.



Astfel ecuaţiile carteziene ale dreptei **D** sunt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \ .$$

c) Dreapta orientată.

Fie **D** o dreaptă în spaţiu. Pe **D** se pot stabili două sensuri de parcurs, corespondente relaţiilor de ordine pe mulţimea punctelor dreptei, pe care convenim să le notăm cu $(+)$ şi $(-)$.

O dreaptă **D** împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numeşte dreaptă orientată. Dacă $\overline{a}$ este vectorul director al dreptei **D**, atunci se acceptă ca sens pozitiv pe **D** sensul vectorului $\overline{a}$ şi vom nota acest sens cu $+$. Acest lucru va fi admis în continuare.

Fie $M_0 \in \mathbf{D}$, în ipotezele făcute, mulţimea

$$\mathbf{D}' = \left\{ M \mid \overline{M_0M} = k\overline{a}, \ k \geq 0 \right\}$$

se numeşte partea pozitivă a dreptei **D**, iar mulţimea

$$\mathbf{D}'' = \left\{ M \mid \overline{M_0M} = s\overline{a}, \ s \leq 0 \right\}$$

se numeşte partea negativă a lui **D**.

Axele de coordonate Ox, Oy, Oz sunt exemple de drepte orientate.

Dacă O este originea, atunci

$$\left\{M \mid \overline{OM} = t\overline{i},\ t \geq 0\right\}$$

este semiaxa pozitivă Ox, iar

$$\left\{M \mid \overline{OM} = t\overline{i},\ t \leq 0\right\}$$

este semiaxa negativă Ox. Vectorului director $\overline{a} \neq \overline{0}$ al dreptei **D** i se poate ataşa versorul

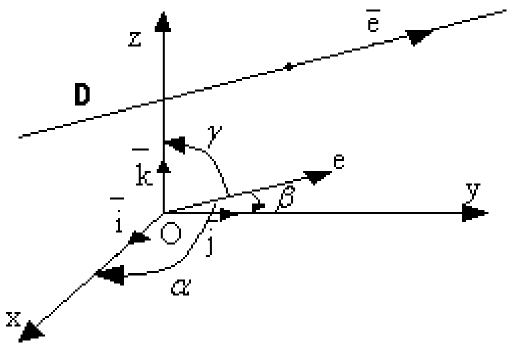
$$\overline{e} = \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|}\ ,$$

numit versor director sau direcţie orientată.

Prin urmare, dreapta **D** poate fi exprimată în forma

$$\mathbf{D} = \left\{M \mid \overline{M_0M} = t\overline{e},\ t \in \mathbf{R}\right\}.$$

Versorul director $\overline{e}$ formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ numite unghiuri directoare ale dreptei **D**.



Coordonatele lui $\overline{e}$ se numesc cosinusurile directoare ale dreptei **D**. Putem scrie

$$\overline{e} = \left(\overline{e}, \overline{i}\right)\overline{i} + \left(\overline{e}, \overline{j}\right)\overline{j} + \left(\overline{e}, \overline{k}\right)\overline{k}$$

sau

$$\overline{e} = \cos\alpha\ \overline{i} + \cos\beta\ \overline{j} + \cos\gamma\ \overline{k}\ .$$

Întrucât $\|\overline{e}\| = 1$, rezultă $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

7.2.1. Unghiul dintre două drepte orientate.

Fie $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ două drepte orientate prin vectorii directori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Prin unghiul dintre dreptele orientate $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ se va înţelege unghiul dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, adică unghiul definit prin

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\|}$$

sau

$$\sin\varphi = \frac{\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|}{\|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

7.2.2. Poziţia relativă a două drepte orientate.

Constatăm echivalenţele:

i) $\mathbf{D}_1 \perp \mathbf{D}_2$ dacă şi numai dacă $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 0$;

ii) $\mathbf{D}_1 \| \mathbf{D}_2$ dacă şi numai dacă $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ (echivalenţa se realizează şi dacă $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$)

Observaţia 7.2.3. Fie $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{D}_2$.

Are loc $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2 \neq \Phi$ dacă şi numai dacă unghiul φ dintre cele două drepte este cuprins între 0 şi π.

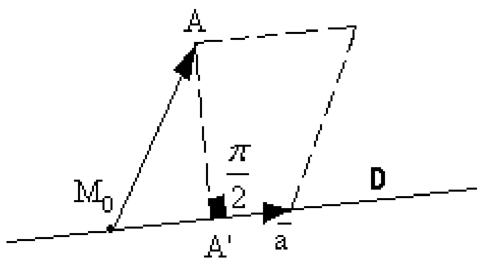
7.2.3. Distanţa de la un punct la o dreaptă.

Fie dreapta $\mathbf{D}$ de ecuaţii

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

această dreaptă conţine punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are drept vector director pe $\overline{a}(l, m, n)$.

Fie A un punct din $\mathbf{E}_3$ şi A' proiecţia sa pe dreapta $\mathbf{D}$.



Lungimea segmentului $|AA'|$ este distanţa de la punctul A la dreapta $\mathbf{D}$ şi se notează cu $d(A, \mathbf{D})$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{M_0A}$ obţinem

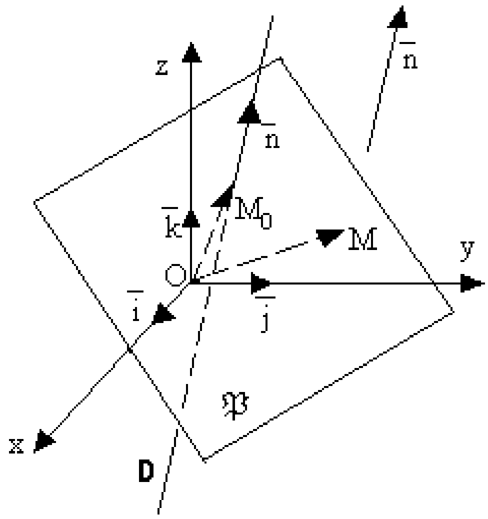
$$d\,(A, \mathbf{D}) = \frac{\left\|\overline{a} \times \overline{M_0A}\right\|}{\|\overline{a}\|}\ .$$

7.3 Planul în spaţiu.

Un plan în spaţiu este determinat de condiţii geometrice ca: trei puncte necoliniare, două drepte concurente, două drepte paralele, o dreaptă şi un punct exterior ei, un punct şi un vector normal (perpendicular) la plan. Ne propunem să stabilim ecuaţia planului sub formă vectorială sau carteziană, impunând anumite condiţii geometrice care îl determină.

a) Planul determinat de un punct şi un vector normal nenul.

Fiind dată o dreaptă $\mathbf{D} = \left\{N \mid \overline{M_0N} = t\overline{n},\ t \in \mathbf{R}\right\}$ care trece prin punctul M_0 şi care are direcţia vectorului $\overline{n}$, există un singur plan $\mathcal{P}$ perpendicular pe $\mathbf{D}$ în M_0.



Observaţia 7.3.1. $M \in \mathcal{P}$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$. De aceea, planul $\mathcal{P}$ este mulţimea

$$\mathcal{P} = \left\{M \mid \left(\overline{M_0M}, \overline{n}\right) = 0\right\}. \tag{7.3.1}$$

Dreapta $\mathbf{D}$ se numeşte normala la planul $\mathcal{P}$, vectorul $\overline{n}$ se numeşte vectorul normal al planului, punctul M care poate genera planul îl vom numi punct curent al lui $\mathcal{P}$.

Teorema 7.3.1. *Orice plan $\mathcal{P}$ care conţine un punct curent $M(x,y,z)$ şi are un vector normal nenul $\overline{n}=(a,b,c)$ care trece prin $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_0\in\mathcal{P}$, este caracterizat de ecuaţia:*

$$ax+by+cz+d=0,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}. \tag{7.3.2}$$

Demonstraţie. $\overline{M_0M}=(x-x_0)\,\overline{i}+(y-y_0)\,\overline{j}+(z-z_0)\,\overline{k}$; condiţia de ortogonalitate a vectorilor $\overline{M_0M}$ şi $\overline{n}$ scrisă în baza produsului scalar este

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \tag{7.3.3}$$

numită ecuaţia carteziană a planului ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe $\overline{n}$.

Dacă prelucrăm membrul stâng al ecuaţiei precedente şi notăm $ax_0+by_0+cz_0=-d$, obţinem ecuaţia cerută de teoremă. ■

Teorema 7.3.2. *Reciproc, orice ecuaţie de forma (7.3.2) caracterizează un plan, dacă a,b,c nu se anulează simultan.*

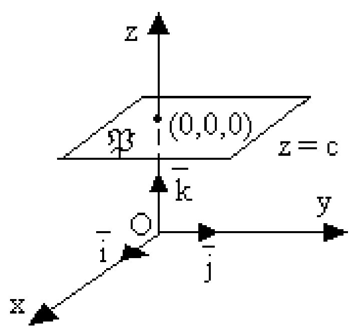
Demonstraţie. Într-adevăr, dacă (x_0,y_0,z_0) este o soluţie a ecuaţiei (7.3.2), atunci $ax_0+by_0+cz_0+d=0$, adică $d=-ax_0-by_0-cz_0$ şi reînlocuind în (7.3.2) obţinem $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,care reprezintă ecuaţia unui plan ce conţine punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul nenul $\overline{n}=(a,b,c)$. ■

Ecuaţia $ax+by+cz+d=0$ în $\mathbf{R}^3$, pentru care $a^2+b^2+c^2\neq 0$, se numeşte ecuaţia carteziană generală a unui plan.

Observaţia 7.3.2. Ecuaţia ce caracterizează un plan în spaţiu este nucleul unei funcţii liniare afine $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$, cu $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, cel puţin trei nenule.

Plane particulare.

Exemplul 7.3.1. Planul xOy este caracterizat de ecuaţia $z=0$ şi vectorul normal $\overline{k}=(0,0,1)$. Orice plan paralel cu xOy este dat de ecuaţia $z=c$.



Analog $x = 0$ reprezintă ecuaţia planului yOz al cărui vector normal este $\bar{i} = (1, 0, 0)$. Un plan paralel cu yOz are ecuaţia $x = a$. Ecuaţia planului xOz este $y = 0$; normala acestui plan are direcţia vectorului $\bar{j} = (0, 1, 0)$; un plan paralel cu xOz are ecuaţia $y = b$.

Exemplul 7.3.2. Ecuaţiile planelor perpendiculare pe planele de coordonate xOy, yOz, zOx sunt respectiv $ax + by + d = 0$, $by + cz + d = 0$, $ax + cz + d = 0$.

Exemplul 7.3.3. Ecuaţiile planelor care trec prin axele de coordonate Ox, Oy, Oz sunt respectiv $by + cz = 0$, $ax + cz = 0$, $ax + by = 0$.

Exemplul 7.3.4. Ecuaţia planului care trece prin origine este $ax + by + cz = 0$.

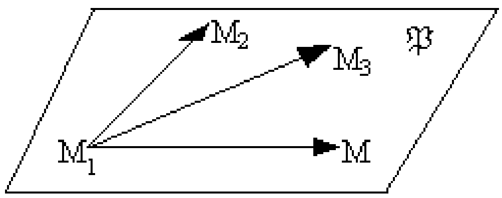
b) Planul determinat de trei puncte necoliniare.

Pentru a stabili ecuaţia ce caracterizează planul determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ procedăm în felul următor:

b.1. folosim ecuaţia generală a planului (7.3.2) şi ecuaţiile obţinute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în această ecuaţie

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

a, b, c reprezintă coordonatele vectorului normal la planul respectiv determinat de cele trei puncte necoliniare.



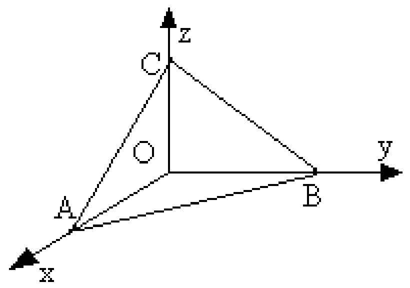
S-a obţinut un sistem de ecuaţii liniar omogen în necunoscutele a, b, c, d cu soluţii nebanale, deoarece a, b, c nu se pot anula simultan. Condiţia care asigură acest lucru este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.3.4}$$

şi care reprezintă ecuaţia carteziană a planului. Într-adevăr, ecuaţia precedentă este o ecuaţie de gradul întâi în x, y, z şi oricare din punctele M_i, $i = 1, 2, 3$ de coordonate x_i, y_i, z_i o satisface.

Ca un caz particular, putem găsi ecuaţia planului prin tăieturi. Înlocuind coordonatele punctelor $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ în ecuaţia (7.3.4), găsim

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$



De asemenea ecuaţia carteziană a planului determinat de punctele M_i, $i=1,2,3$ ne ajută să stabilim condiţia de coplanaritate a patru puncte din spaţiu.

b.2. Fie M un punct care poate genera planul, al cărui vector de poziţie este $\overline{OM}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. Obţinem ecuaţia vectorială a planului $\mathcal{P}$ impunând condiţiile de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$, adică

$$\left(\overline{M_1M}\ ,\ \overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right)=0.$$

Dacă $M_i(\overline{r_i})$, $\overline{r_i}=x_i\overline{i}+y_i\overline{j}+z_i\overline{k}$**,** relaţia anterioară este echivalentă cu ecuaţia vectorială

$$(\overline{r}-\overline{r_1}\ ,(\overline{r_2}-\overline{r_1})\times(\overline{r_3}-\overline{r_1}))=0,$$

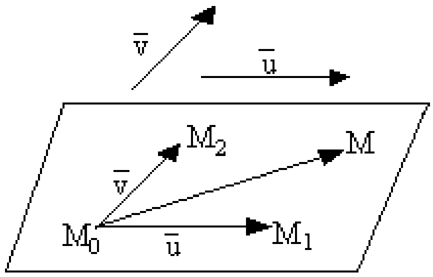
sau

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Am obţinut ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte necoliniare, ecuaţie echivalentă cu cea de la **b.1.**

c) Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari.

Fie $\overline{u}=(l_1,m_1,n_1)$ şi $\overline{v}=(l_2,m_2,n_2)$ doi vectori necoliniari, adică $\overline{u}\times\overline{v}\neq\overline{0}$ şi un punct cunoscut M_0. Cele trei elemente $M_0,\overline{u},\overline{v}$ determină un plan unic $\mathcal{P}$.



Construim reprezentanţii vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ ca fiind $\overline{M_0M_1}$ respectiv $\overline{M_0M_2}$. Un punct $M \in \mathbf{E}_3$ aparţine planului dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}$ şi $\overline{M_0M_2}$ sunt coplanari. Coplanaritatea acestor vectori o exprimăm astfel:

c.1. $\overline{M_0M} = r\overline{u} + s\overline{v}$; care scrisă în coordonate, această relaţie vectorială este echivalentă cu

$$\begin{aligned} x &= x_0 + rl_1 + sl_2, \\ y &= y_0 + rm_1 + sm_2, \quad r, s \in \mathbf{R} \\ z &= z_0 + rn_1 + sn_2, \end{aligned}$$

numite ecuaţiile parametrice ale planului $\mathcal{P}$, iar r şi s se numesc parametri.

c.2. $\left(\overline{M_0M}\ , \overline{u} \times \overline{v}\right) = 0$; scrisă în coordonate această ecuaţie vectorială conduce la ecuaţia carteziană

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Precizăm că toate ecuaţiile carteziene obţinute pentru plan sunt echivalente cu ecuaţia generală (7.3.2). Se observă că un plan depinde de patru parametri neesenţiali a, b, c, d şi trei parametri esenţiali. Dacă $a \neq 0$, atunci cei trei parametri esenţiali sunt

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}.$$

Precizăm că indiferent de forma ecuaţiei carteziene a planului, coeficienţii lui x, y, z reprezintă coordonatele vectorului normal $\overline{n}$. Vectorul $\overline{n}$ este unic pentru un plan dat, abstracţie făcând de un factor scalar nenul. Ecuaţiile normalei la plan care trece prin M_0 sunt

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

7.3.1. Reuniunea şi intersecţia a două plane.

Fie $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ două plane de ecuaţii $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Atunci reuniunea celor două plane este dată de mulţimea

$$L = \{(x, y, z) \mid (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\}.$$

Va trebui să arătăm că $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = L$. Fie un punct $(p, q, r) \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ adică $(p, q, r) \in \mathcal{P}_1$ sau $(p, q, r) \in \mathcal{P}_2$, ceea ce este echivalent cu $a_1p+b_1q+c_1r+d_1 = 0$ sau $a_2p + b_2q + c_2r + d_2 = 0$.

În ambele cazuri $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$, deci $(p, q, r) \in L$. Am arătat că $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subseteq L$. Invers, fie $(p, q, r) \in L$, ceea ce este echivalent cu $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$ şi deci cel puţin un factor este zero, fie că $a_1p + b_1q + c_1r + d_1 = 0$; rezultă $(p, q, r) \in \mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Deci $L \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ şi în final rezultă egalitatea $L = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

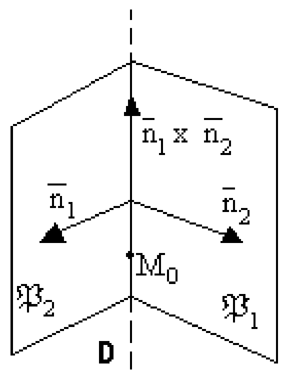
Observaţia 7.3.3. Reuniunea a două plane reprezintă o cuadrică degenerată.

Presupunem că planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ nu sunt paralele sau confundate. Intersecţia $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ este o dreaptă pe care o notă cu **D**, ale cărei ecuaţii sunt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \tag{7.3.5.}$$

unde $rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$.

Observaţia 7.3.4. Dacă $\mathcal{P}_1$ nu este perpendicular pe $\mathcal{P}_2$, atunci $\overline{n_1} \notin \mathcal{P}_2$ şi $\overline{n_2} \notin \mathcal{P}_1$, iar dacă $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, are loc $\overline{n_1} \in \mathcal{P}_2$ şi $\overline{n_2} \in \mathcal{P}_1$.



Sistemul de ecuaţii liniare prin care este reprezentată dreapta **D** este simplu nedeterminat; sistemul admite o infinitate de soluţii care sunt tocmai punctele dreptei.

Un punct M_0 al dreptei $\mathbf{D}$ se obţine ca intersecţia planelor $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ cu unul din planele de coordonate sau cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate. Direcţia dreptei $\mathbf{D}$ este dată de direcţia vectorului $\overline{n_1}\times\,\overline{n_2}$, unde $\overline{n_1}\,(a_1,b_1,c_1)\,,\,\overline{n_2}\,(a_2,b_2,c_2)\,.$

Astfel parametrii directori $l,m,n,$ ai dreptei $\mathbf{D}$ sunt $l=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $m=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Dacă presupunem că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, atunci sistemul care dă ecuaţiile dreptei de intersecţie a două plane se reduce la

$$\begin{cases} x=az+p \\ y=bz+q \end{cases}$$

(soluţiile se obţin din rezolvarea sistemului (7.3.5) cu z necunoscută secundară) care sunt ecuaţiile canonice ale dreptei $\mathbf{D}$.

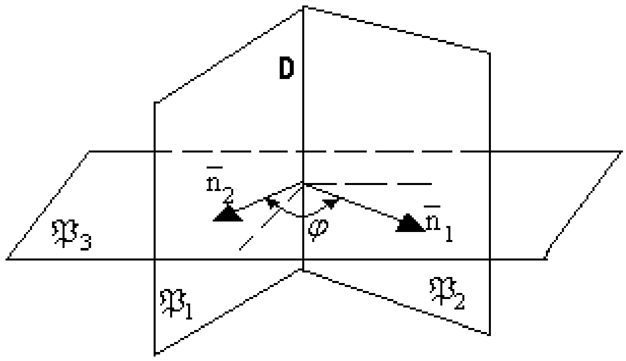
Din aceste ecuaţii constatăm că o dreaptă în spaţiu este exprimată cu ajutorul a două ecuaţii care depind de patru parametri esenţiali a,b,p,q. Prin urmare, pentru determinarea unei drepte sunt suficiente două condiţii. Pentru a determina poziţia relativă a unor drepte sau plane se alcătuieşte sistemul format de ecuaţiile lor, se rezolvă algebric acest sistem şi se interpretează geometric rezultatul. De asemenea precizăm că din punct de vedere topologic, dreptele şi planele sunt respectiv submulţimi închise în spaţiu.

7.3.2. Unghiul dintre două plane orientate.

Fie planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ având ecuaţiile $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, respectiv $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

Planele sunt paralele dacă şi numai dacă vectorii normali $\overline{n_1}\,(a_1,b_1,c_1)\,,$ $\overline{n_2}\,(a_2,b_2,c_2)$ sunt coliniari, adică $\overline{n_1}\times\,\overline{n_2}=\overline{0}$ sau $(a_1,b_1,c_1)=k\,(a_2,b_2,c_2)\,,$ $k\in\mathbf{R}\backslash\,\{0\}$ şi $d_1\neq d_2$. Cele două ecuaţii reprezintă acelaşi plan dacă şi numai dacă $(a_1,b_1,c_1)=k\,(a_2,b_2,c_2)\,,\,k\in\mathbf{R}\backslash\,\{0\}$ şi $d_1=kd_2$.

Două plane neparalele şi neconfundate se intersectează după o dreaptă $\mathbf{D}$ şi determină un unghi diedru.



Unghiul diedru format de cele două plane este măsurat prin unghiul plan φ, care se obţine secţionând planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ cu un plan $\mathcal{P}_3$ perpendicular pe **D**. Prin definiţie, unghiul diedru dintre cele două plane este unghiul dintre cei doi vectori normali $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$ determinat prin

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n_1},\overline{n_2})}{\|\overline{n_1}\|\|\overline{n_2}\|} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\ ,\ \varphi \in [0,\pi]\,.$$

În particular planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă produsul scalar $(\overline{n_1},\overline{n_2}) = 0$ sau coordonatele $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

7.3.3. Fascicule de plane.

În **7.3.1.** am văzut cum se poate cerceta o dreaptă determinată de intersecţia a două plane. Reciproc, dacă se dă o dreaptă, atunci prin ea trec o infinitate de plane. Mulţimea tuturor planelor care trec printr-o dreaptă **D** se numeşte fascicul de plane. Dreapta **D** se numeşte axa fasciculului. Considerăm planele de ecuaţii $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ care determină dreapta **D**. Deoarece orice vector nenul $\overline{n}$ perpendicular pe **D** se scrie în forma $\overline{n} = r\overline{n_1} + s\overline{n_2}$, $r^2 + s^2 \neq 0$, rezultă că ecuaţia unui plan oarecare din fasciculul de axă **D** are ecuaţia

$$r\,(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + s\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,\ r^2 + s^2 \neq 0.$$

Mulţimea planelor caracterizate de ecuaţii de forma

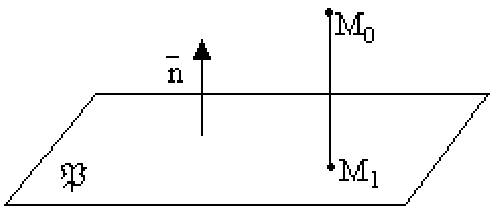
$$a_1x + b_1y + c_1z + \lambda = 0$$

se numeşte fascicul de plane paralele (cu $\mathcal{P}_1$).

Folosind fasciculele de plane putem justifica şi în acest mod ecuaţiile exemplelor de plane particulare 7.3.1-4. Astfel, ştiind că axa absciselor este $Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, ecuaţia unui plan care trece prin Ox este $by + cz = 0$, iar ecuaţia unui plan paralel cu acesta este $by + cz + d = 0$.

7.3.4. Distanţa de la un punct la un plan.

Fie planul $\mathcal{P}$ de ecuaţie $ax + by + cz + d = 0$, al cărui vector normal este $\overline{n}(a, b, c)$. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din $\mathbf{E}_3$ exterior planului şi fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ proiecţia lui M_0 pe planul $\mathcal{P}$.



Lungimea $\left\|\overline{M_1M_0}\right\|$ este distanţa de la punctul M_0 la planul $\mathcal{P}$ şi se notează cu $d(M_0, \mathcal{P})$.

Folosind produsul scalar al vectorilor $\overline{n}$ şi $\overline{M_1M_0}$ găsim

$$\left(\overline{n}, \overline{M_1M_0}\right) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) =$$

$$= \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, d(M_0, \mathcal{P}).$$

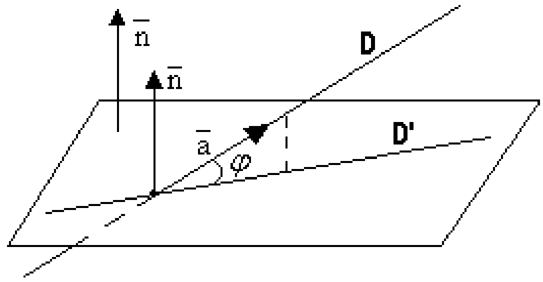
Deoarece $M_1 \in \mathcal{P}$ rezultă că $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Înlocuind în relaţia precedentă se obţine

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Observaţia 7.3.5. Coordonatele punctului M_1 nu au nici un rol în valoarea finală a distanţei de la M_0 la $\mathcal{P}$, ci numai un rol intermediar.

7.3.5. Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan.

Presupunem că dreapta $\mathbf{D}$ intersectează planul $\mathcal{P}$ (altfel dacă dreapta $\mathbf{D}$ este paralelă sau inclusă în planul $\mathcal{P}$ unghiul căutat este egal cu zero) şi presupunem cunoscute de asemenea pe $\overline{n}(a, b, c)$ şi $\overline{a}(l, m, n)$.



Fie $\mathbf{D}'$ proiecţia dreptei $\mathbf{D}$ pe planul $\mathcal{P}$. Unghiul căutat este unghiul dintre dreapta $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{D}'$. Întrucât vectorul director al dreptei $\mathbf{D}'$ este greu de găsit, vom calcula unghiul complementar

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{(\overline{n},\overline{a})}{\|\overline{n}\|\,\|\overline{a}\|}$$

sau

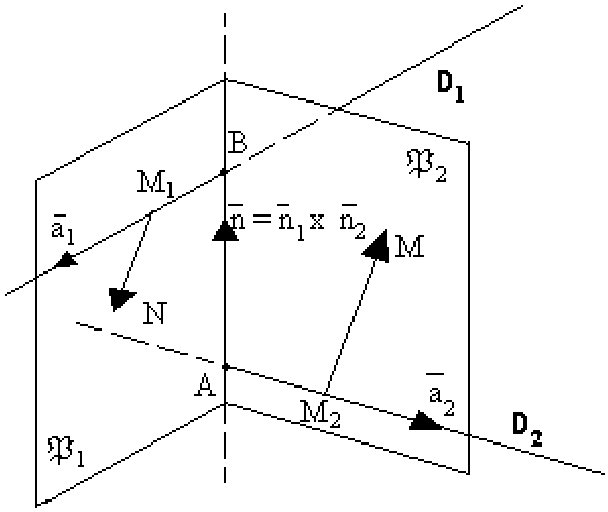
$$\sin\varphi=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ .$$

Paralelismul sau incluziunea dreptei $\mathbf{D}$ cu planul $\mathcal{P}$ este echivalentă cu $(\overline{n},\overline{a})=0$ sau $al+bm+cn=0$.

Dreapta $\mathbf{D}$ este perpendiculară pe plan dacă şi numai dacă $\overline{n}\times\overline{a}=\overline{0}$ sau $(a,b,c)=k\,(l,m,n)\,,\ k\in\mathbf{R}\backslash\{0\}\,.$

7.3.6. Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spaţiu.

Două drepte din spaţiu pot fi confundate, paralele, concurente sau oarecare. Pentru două drepte $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ care admit pe $\overline{a_1}$ respectiv $\overline{a_2}$ ca vectori directori, există o direcţie normală comună unică dacă şi numai dacă dreptele $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ sunt oarecare sau concurente. În acest caz există o dreaptă şi numai una care se sprijină simultan pe cele două drepte având direcţia $\overline{n}=\overline{a_1}\times\overline{a_2}$ numită perpendiculara comună a dreptelor $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$.



Pentru a stabili ecuaţiile perpendicularei comune $\mathbf{D}$, observăm că această dreaptă apare ca intersecţia a două plane: planul $\mathcal{P}_1$, care conţine pe $\mathbf{D}_1$ şi $\overline{n}$ şi planul $\mathcal{P}_2$ care conţine pe $\mathbf{D}_2$ şi $\overline{n}$. Presupunând că dreptele $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ trec respectiv prin punctele M_1 şi M_2 şi că N este punctul curent în $\mathcal{P}_1$, iar M este punctul curent în $\mathcal{P}_2$, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\mathbf{D}:\begin{cases}\left(\overline{M_1N},\overline{a_1}\times\overline{n}\right)=0\\ \\ \left(\overline{M_2M},\overline{a_2}\times\overline{n}\right)=0.\end{cases}$$

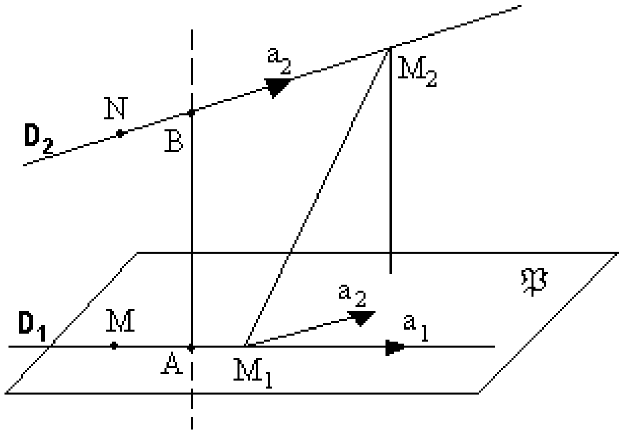
7.3.7. Distanţa dintre două drepte.

Fie două drepte $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ descrise respectiv de punctele M şi N. Numărul $\inf d\left(M,N\right)$ se numeşte distanţa dintre dreptele $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ şi se notează cu $d\left(\mathbf{D}_1;\mathbf{D}_2\right)$. Din considerente geometrice rezultă că $d\left(\mathbf{D}_1;\mathbf{D}_2\right)$ se află astfel:

1. dacă dreptele $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ sunt concurente, atunci $d\left(\mathbf{D}_1;\mathbf{D}_2\right)=0$;

2. dacă $\mathbf{D}_1\|\ \mathbf{D}_2$, atunci prin $M_0\in\mathbf{D}_1$ se duce un plan perpendicular pe $\mathbf{D}_1$ care taie pe $\mathbf{D}_2$ în N_0 şi avem $d\left(\mathbf{D}_1;\mathbf{D}_2\right)=d\left(M_0,N_0\right)$;

3. dacă $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ sunt oarecare, $d\left(\mathbf{D}_1;\mathbf{D}_2\right)=\left\|\overline{AB}\right\|$, punctele A şi B fiind pe perpendiculara comună $\mathbf{D}$ ($M_1\in\mathbf{D}_1$ şi $M_2\in\mathbf{D}_2$ sunt puncte cu coordonatele cunoscute).



Această distanţă se mai poate afla astfel: prin dreapta $\mathbf{D}_1$ ducem un plan $\mathcal{P}$ paralel cu dreapta $\mathbf{D}_2$.

Atunci $d(\mathbf{D}_1; \mathbf{D}_2) = d(M_2, \mathcal{P})$, unde M_2 este un punct cunoscut al dreptei $\mathbf{D}_2$. Figura anterioară arată că această distanţă este lungimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Din semnificaţia produsului mixt rezultă

$$d(\mathbf{D}_1; \mathbf{D}_2) = \frac{\left|\left(\overline{M_1M_2}, \overline{a_1} \times \overline{a_2}\right)\right|}{\|\overline{a_1} \times \overline{a_2}\|} .$$

Capitolul 8

Cuadrice (Conice).

8.1 Cuadrice-definiţie. Centrul unei cuadrice.

În $\mathbf{E}_3$ considerăm reperul cartezian $\left\{O,\bar{i},\bar{j},\overline{k}\right\}$ şi forma pătratică afină $g:\mathbf{E}_3\to\mathbf{R}$ definită prin

$$\begin{aligned}g\left(x,y,z\right)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+\\+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00},\end{aligned}$$

cu $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$.

Definiţia 8.1.1. *Mulţimea de nivel constant zero dată de ecuaţia*

$$\sum=g^{-1}\left(0\right)=\left\{M\left(x,y,z\right)\mid\left(x,y,z\right)\in\mathbf{R}^3,g\left(x,y,z\right)=0\right\},$$

se numeşte cuadrică sau suprafaţă algebrică de ordinul al doilea.

Se notează $\sum:g\left(x,y,z\right)=0$.

Prin trecerea de la reperul cartezian $\left\{O,\bar{i},\bar{j},\overline{k}\right\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (reperul canonic) faţă de care ecuaţia $g\left(x,y,z\right)=0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (ecuaţia canonică), se dovedeşte că $\sum$ este congruentă cu una din mulţimile: sferă, elipsoid, hiperboloid cu o pânză, cu două pânze, paraboloid eliptic, hiperbolic, con, cilindru circular, eliptic, hiperbolic, parabolic, pereche de drepte secante, pereche de plane paralele, confundate, dreaptă, mulţime care conţine un singur punct, mulţime vidă.

Faţă de transformările ortogonale, ecuaţia $g\left(x,y,z\right)=0$ are următorii invarianţi

$$\Delta=\det\overline{A},\delta=\det A,I=trA,$$

$$J=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

unde

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

cu $a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j \quad i,j = 0,1,2,3$.

Felul cuadricei se poate stabili cu ajutorul invarianţilor. De exemplu

$$\begin{array}{c|l} \Delta & \text{Natura cuadricei} \\ \hline \Delta = 0 & \text{degenerată} \\ \Delta \neq 0 & \text{nedegenerată} \end{array} \tag{8.1}$$

Dintre cuadricele nevide, sfera, elipsoidul, hiperboloizii şi paraboloizii sunt cuadrice nedegenerate; conul, cilindrii şi perechile de plane se numesc cuadrice degenerate.

Sfera este o cuadrică în care $a_{11} = a_{22} = a_{33} = m \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ şi $\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 \geq 0$. Centrul sferei este de coordonate $\left(-\frac{a_{10}}{m}, -\frac{a_{20}}{m}, -\frac{a_{30}}{m}\right)$ şi raza sferei $r = \sqrt{\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m}}$.

Centrul cuadricei.

Există cuadrice $\sum : g(x,y,z) = 0$ care admit centru de simetrie. Acesta este de fapt originea reperului canonic. Pentru a găsi relaţiile ce conduc la centrul unei cuadrice, efectuăm translaţia $x = x_0 + x', y = y_0 + y', z = z_0 + z'$.

Ecuaţia cuadricei faţă de sistemul translatat în $C(x_0, y_0, z_0)$ va fi

$$g(x_0 + x', y_0 + y', z_0 + z') = 0.$$

Aplicând formula Taylor, această ecuaţie se transcrie

$$g(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{1!}\left(x' \frac{\partial g}{\partial x_0} + y' \frac{\partial g}{\partial y_0} + z' \frac{\partial g}{\partial z_0}\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x'^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + y'^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} + z'^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z_0^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(2x'y' \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} + 2x'z' \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial z_0} + 2y'z' \frac{\partial^2 g}{\partial y_0 \partial z_0}\right) = 0,$$

unde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z + 2a_{10},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z + 2a_{20},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2a_{31}x + 2a_{32}y + 2a_{33}z + 2a_{30},$$

şi unde în plus

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a_{11}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2a_{22}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 2a_{33},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2a_{12}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = 2a_{13}, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = 2a_{23}.$$

Teorema 8.1.1. *Punctele* (x', y', z') *şi* $(-x', -y', -z')$ *sunt simultan pe suprafaţa* $\sum$ *dacă şi numai dacă punctul* (x_0, y_0, z_0) *satisface relaţiile:*

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z_0} = \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

De aceea, dacă cuadrica $\sum$ are centru, atunci coordonatele sale sunt în mod necesar soluţia sistemului

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0.$$

Pot interveni următoarele situaţii:

1. Dacă $\det A = \delta \neq 0$, sistemul liniar este compatibil unic determinat, deci cele trei plane $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$, se intersectează într-un punct unic; prin urmare cuadrica admite un singur centru la distanţă finită. Este cazul sferei, elipsoidului, hiperboloidului cu o pânză, cu două pânze şi conului.

2. Dacă $\delta = 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi unicul determinant caracteristic al sistemului este nenul, sistemul este incompatibil. Cele trei plane formează o prismă triunghiulară. Este cazul paraboloidului eliptic şi hiperbolic.

3. Dacă $\delta = 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi unicul determinant caracteristic al sistemului este nul, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat. Cele trei plane se intersectează după o dreaptă numită dreaptă de centre. Este cazul cilindrilor circulari, eliptici şi hiperbolici.

4. Dacă $\delta = 0$ şi rangul sistemului este unu şi cei doi determinanţi caracteristici nu sunt nuli, sistemul este incompatibil. Planele sunt paralele. Este cazul cilindrului parabolic.

5. Dacă $\delta = 0$ şi rangul sistemului este unu, iar cei doi determinanţi caracteristici sunt nuli, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei plane sunt confundate. Cuadrica are un plan de centre. Este cazul planelor paralele distincte sau confundate.

8.2 Forma canonică a unei cuadrice.

Pentru stabilirea ecuaţiei canonice a cuadricei se poate proceda astfel:

i) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face translaţie.

ii) Dacă cel puţin unul din numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci tipul cuadricei de ecuaţie

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+$$

$$+2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

este determinat de expresia termenilor de gradul al doilea, adică de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Matriceal această formă pătratică se scrie

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

unde $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$ sau

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

A fiind matrice simetrică.

Pentru matricea A se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi vectorii proprii corespunzători care sunt ortogonali. Prin normare obţinem versorii $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Se notează cu R matricea ce conţine pe coloane coordonatele versorilor $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$; având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = 1$. Rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Direcţiile noilor axe de coordonate sunt date de direcţiile versorilor proprii $\overline{e_1}, \overline{e_2}$, respectiv $\overline{e_3}$. În final, dacă este cazul, se face o translaţie.

8.3 Intersecţia unei cuadrice cu o dreaptă.

a) Intersecţia dintre o dreaptă şi o cuadrică.

Fie **D** o dreaptă de ecuaţii

$$x = x_0 + tl,\ \ y = y_0 + tm,\ \ z = z_0 + tn, \quad t \in \mathbf{R}$$

şi $\sum$ o cuadrică de ecuaţie $g(x, y, z) = 0$. Intersecţia $\mathbf{D} \cap \sum$ corespunde rădăcinilor t_1 şi t_2 ale ecuaţiei în $\mathbf{R}$,

$$t^2 \varphi(l, m, n) + t(l\ g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0}) + g(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{8.3.1}$$

unde $\varphi(l, m, n) = a_{11} l^2 + a_{22} m^2 + a_{33} n^2 + 2a_{12} lm + 2a_{13} l\ n + 2a_{23} mn$, iar $g_{x_0} = g_x(x_0, y_0, z_0)$ etc. (a se vedea scrierea ecuaţiei $g(x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn) = 0$).

Discuţie.

1. Fie $\varphi(l, m, n) \neq 0$. În acest caz ecuaţia (8.3.1) este o ecuaţie de gradul al doilea.

Dacă $q = (l g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0})^2 - 4\varphi(l, m, n) g(x_0, y_0, z_0) > 0$, atunci ecuaţia are două rădăcini reale distincte t_1 şi t_2. Astfel, dreapta **D** intersectează cuadrica $\sum$ în două puncte M_1, M_2. Dacă $q = 0$, atunci $t_1 = t_2$; corespunzător, **D** va intersecta pe $\sum$ în două puncte confundate. În acest caz dreapta **D** se numeşte tangentă la $\sum$. Dacă $q < 0$, atunci ecuaţia (8.3.1) nu are rădăcini reale şi deci **D** nu intersectează pe $\sum$.

2. Fie $\varphi(l, m, n) = 0$. Atunci ecuaţia (8.3.1) devine o ecuaţie de gradul întâi. Dacă $l g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} \neq 0$, atunci există o soluţie unică şi **D** intersectează cuadrica $\sum$ într-un singur punct. Dacă $l g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$ şi $g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci relaţia (8.3.1) este o imposibilitate. În aceste condiţii **D** nu intersectează cuadrica $\sum$. Dacă $l g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$ şi $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, atunci (8.3.1) este o identitate şi astfel $\mathbf{D} \subset \sum$.

Fie $\sum$ o cuadrică dată prin ecuaţia $g(x, y, z) = 0$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sum$ un punct în care cel puţin unul din numerele $g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0}$ este diferit de zero.

Teorema 8.3.1. *O dreaptă* **D** *de parametrii directori* (l, m, n) *este tangentă la cuadrica* $\sum$ *în punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sum$ *dacă şi numai dacă*

$$l g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0.$$

Demonstraţie. Intersecţia dintre dreapta $\mathbf{D}: x = x_0 + tl,\ y = y_0 + tm,$ $z = z_0 + tn,\ \ t \in \mathbf{R}$ şi cuadrica $\sum$ corespunde la rădăcinile t_1 şi t_2 ale ecuaţiei (8.3.1). Deoarece $M_0 \in \sum$, avem $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ecuaţia (8.3.1) va avea rădăcina dublă $t = 0$ dacă şi numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$. ■

Teorema 8.3.2. *Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica $\sum$ în punctul M_0 este planul de ecuaţie*

$$(x - x_0)\, g_{x_0} + (y - y_0)\, g_{y_0} + (z - z_0)\, g_{z_0} = 0.$$

Acest plan se numeşte planul tangent la cuadrica $\sum$ în punctul $M_0 \in \sum$.

Demonstraţie. Dreapta $\mathbf{D}$ este tangentă în M_0 la $\sum$ dacă şi numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$. Eliminând parametrii l, m, n, t, găsim

$$(x - x_0)\, g_{x_0} + (y - y_0)\, g_{y_0} + (z - z_0)\, g_{z_0} = 0.$$

Menţionăm că ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0 \in \sum$ se poate obţine şi prin dedublarea ecuaţiei $g(x, y, z) = 0$ în punctul M_0. ■

Dreapta care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe planul tangent se numeşte normală şi are ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}\ ,$$

unde vectorul normal la planul tangent este $\overline{n}\,(g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0})$.

b) Intersecţia dintre un plan şi o cuadrică.

Intersecţia dintre un plan $\mathcal{P}$ şi o cuadrică $\sum$ se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \\ \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

În ipoteza că $c \neq 0$, din ecuaţia planului obţinem pe z şi înlocuim în $g(x, y, z) = 0$. Astfel, găsim că intersecţia $\mathcal{P} \cap \sum$ este o mulţime de puncte din planul $\mathcal{P}$ caracterizată printr-o ecuaţie de forma

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{10}x + 2a'_{20}y + a'_{00} = 0.$$

Deci $\mathcal{P} \cap \sum$ este o conică.

8.4 Studiul cuadricelor pe ecuaţia canonică.

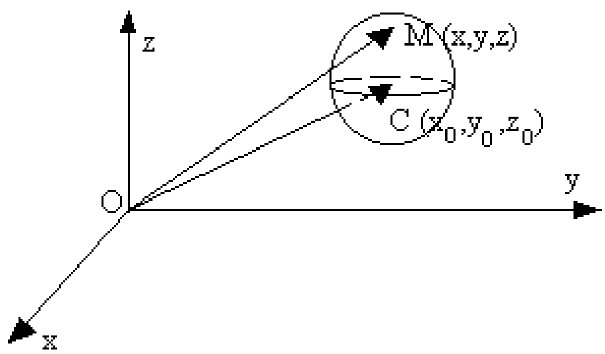
a) Sfera.

Fie $\mathbf{E}_3$ un spaţiu punctual euclidian real tridimensional raportat la un reper cartezian $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2$. Expresia distanţei de la M_1 la M_2 este

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Definiţia 8.4.1. *Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi r un număr real pozitiv fixat. Sfera $\mathcal{S}$ de centru C şi rază r este mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ cu proprietatea că*

$$d(C, M) = r.$$



Teorema 8.4.1. *Punctul $M(x, y, z)$ aparţine sferei $\mathcal{S}$ care are centrul în $C(x_0, y_0, z_0)$ şi raza r dacă şi numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Demonstraţie. Faptul că $M \in \mathcal{S}$ este echivalent cu $d(C, M) = r$, adică $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$, aşadar $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ şi deci

$$\mathcal{S} = \left\{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\right\},$$

sau mai pe scurt

$$\mathcal{S} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

■

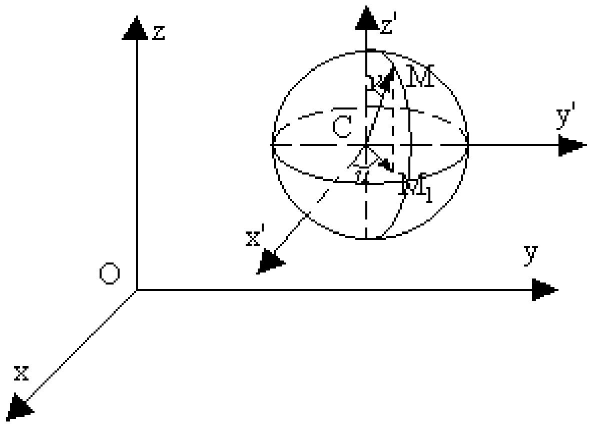
Ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ se numeşte ecuaţia implicită a sferei $\mathcal{S}$ de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r.

Această ecuaţie este echivalentă cu trei ecuaţii parametrice în $\mathbf{R}^3$ şi anume

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos u \sin v, \\ y = y_0 + r \sin u \sin v, \\ z = z_0 + r\cos v, \end{cases}$$

unde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$ cu u, v parametri, sau cu ecuaţia

$$\overline{r} = \overline{r_0} + r\left(\cos u \sin v\overline{i} + \sin u \sin v\overline{j} + \cos v\overline{k}\right) \text{ în } \mathcal{V}_3.$$



Observaţia 8.4.1. Intersectăm sfera $\mathcal{S}$ cu un plan paralel cu xOy ce conţine C, pe care îl notăm cu $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} = (x'Cy')$ şi fie $M \in \mathcal{S}$.

$$\left\|\overrightarrow{CM_1}\right\| = pr_{\mathcal{P}}\overrightarrow{CM} = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = r\sin v.$$

Alegem reperul $Cx'y'z'$ astfel: $Cz' \perp \mathcal{P}$, $CT \| Ox$ $(CT = Cx')$ şi construim Cy' astfel încât $Cy' \perp Cx'$ (versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ rămân neschimbaţi prin translaţia reperului în C). Avem că

$$\begin{aligned} &pr_{Cx'}\overrightarrow{CM_1} = r\cos u \sin v; \\ &pr_{Cy'}\overrightarrow{CM_1} = r \sin v \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - u\right); pr_{Cy'}\overrightarrow{CM_1} = r\sin v \sin u; \\ &pr_{Cz'}\overrightarrow{CM} = r\cos v. \end{aligned}$$

Are loc:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1M} = r\cos u \sin v\overline{i} + r\sin v \sin u\overline{j} + r\cos v\overline{k}.$$

Folosind schimbarea de repere carteziene este adevărată egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM},$$

ceea ce este echivalent cu

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} + r\cos u \sin v\bar{i} + r\sin v \sin u\bar{j} + r\cos v\bar{k},$$

de unde se obţin ecuaţiile parametrice ale sferei $\mathcal{S}$ de centru C şi rază egală cu r.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x, y, z, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2 + z^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulţimea

$$\sum : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Deoarece ecuaţia lui $\sum$ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$$

rezultă:

1. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, atunci $\sum$ este o sferă cu centrul $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, $z_0 = -c$ şi de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$;

2. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, atunci $\sum = \{a^2 + b^2 + c^2 - d\}$;

3. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, atunci $\sum = \Phi$.

Ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

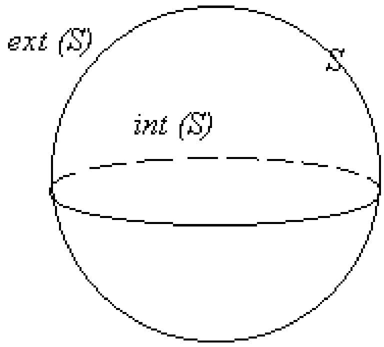
cu $a^2+b^2+c^2-d > 0$ se numeşte ecuaţia carteziană generală a sferei. Evident această ecuaţie este echivalentă cu

$$\begin{array}{l} d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0,\ d \neq 0, \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - dd_1 > 0. \end{array}$$

O sferă din spaţiu este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Ea are proprietatea că separă spaţiul în două submulţimi disjuncte: interiorul lui $\mathcal{S}$ notat $int\,(\mathcal{S})$ şi exteriorul lui $\mathcal{S}$ notat $ext\,(\mathcal{S})$. Acestea pot fi descrise cu ajutorul funcţiei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f\,(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2,$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct fixat, iar $r > 0$ (fixat).



Într-adevăr,

$$int(\mathcal{S}) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) < 0\},$$
$$ext(\mathcal{S}) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) > 0\}.$$

Teorema 8.4.2. **1)** *Mulţimea* $int(\mathcal{S})$*este convexă;*
2) $\forall\ M_1 \in int(\mathcal{S}), \forall\ M_2 \in ext(\mathcal{S})$, *segmentul* $[M_1M_2]$ *taie* $\mathcal{S}$.

Demonstraţie. Presupunem că $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2$, două puncte din spaţiu. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{aligned} x &= (1-t)\,x_1 + tx_2,\\ y &= (1-t)\,y_1 + ty_2,\\ z &= (1-t)\,z_1 + tz_2, \end{aligned}$$

unde $t \in [0,1]$.

1) Dacă $M_1, M_2 \in int(\mathcal{S})$, adică $f(x_i, y_i, z_i) = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} &f(x,y,z) = f[(1-t)\,x_1 + tx_2, (1-t)\,y_1 + ty_2, (1-t)\,z_1 + tz_2] =\\ &= [(1-t)\,x_1 + tx_2]^2 + [(1-t)\,y_1 + ty_2]^2 + [(1-t)\,z_1 + tz_2] - r^2 \leq\\ &\leq (1-t)\,f(x_1, y_1, z_1) + tf(x_2, y_2, z_2) < 0, \end{aligned}$$

pentru orice $t \in [0,1]$. Pentru prezentarea finală a inegalităţii anterioare neam folosit de următoarea inegalitate $[(1-t)\,x_1 + tx_2]^2 \leq (1-t)\,x_1^2 + tx_2^2$, a cărei demonstraţie este: $(1-t)^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + 2t(1-t)\,x_1x_2 \leq (1-t)\,x_1^2 + tx_2^2$, adică $(1-t)\,x_1^2((1-t)-1) + tx_2^2(t-1) + 2t(t-1)\,x_1x_2 \leq 0$, iar aceasta se poate scrie $-t(1-t)\,x_1^2 - t(1-t)\,x_2^2 - 2t(1-t)\,x_1x_2 \leq 0$, de unde avem că $-t(1-t)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \leq 0$, sau $-t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \leq 0$ şi care este adevărată în cazul în care $t \in [0,1]$.

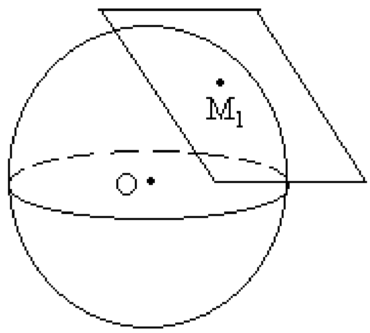
Deci $[M_1M_2] \subset int(\mathcal{S})$.

2) Fie $M_1 \in int(\mathcal{S})$, adică $f(x_1, y_1, z_1) < 0$ şi $M_2 \in ext(\mathcal{S})$, adică $f(x_2, y_2, z_2) > 0$. Se consideră funcţia continuă $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$\begin{aligned}&\varphi(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2] = \\ &= [(1-t)x_1 + tx_2]^2 + [(1-t)y_1 + ty_2]^2 + [(1-t)z_1 + tz_2] - r^2,\end{aligned}$$

pentru $t \in [0,1]$. Se observă că $\varphi(0) = f(x_1, y_1, z_1) < 0$, iar $\varphi(1) = f(x_2, y_2, z_2) > 0$, deci există o valoare $t_0 \in [0,1]$ astfel încât $0 = \varphi(t_0) = [(1-t_0)x_1 + t_0x_2]^2 + [(1-t_0)y_1 + t_0y_2]^2 + [(1-t_0)z_1 + t_0z_2] - r^2$ şi deci punctul de coordonate $((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2, (1-t_0)z_1 + t_0z_2)$ este situat pe $\sum$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Definiţia 8.4.2. *Numim plan tangent la o sferă în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ locul geometric al tuturor tangentelor la sferă în punctul M_1.*



Ecuaţia planului tangent în punctul $M_1 \in \sum$ se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei, adică

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) - r^2 = 0,$$

sau

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) + d = 0.$$

b) Elipsoid, hiperboloid, paraboloid.

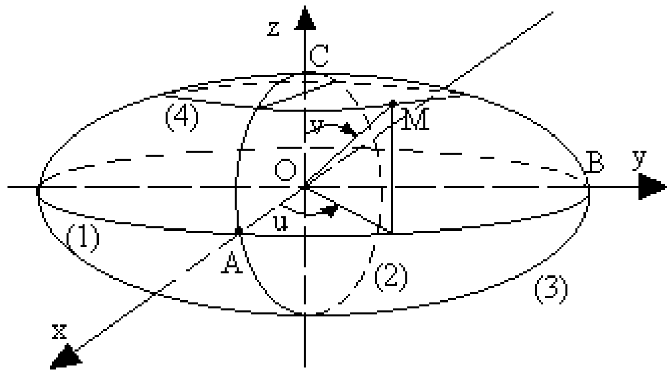
Definiţia 8.4.3. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

cu $a, b, c > 0$, se numeşte elipsoid.

Această suprafaţă este simetrică faţă de planele de coordonate, numite planele principale ale elipsoidului. Suprafaţa este simetrică şi faţă de axele de coordonate care se numesc axele suprafeţei. Rezultă că originea este centrul de simetrie. Originea se numeşte centrul elipsoidului. Punctele în care axele înţeapă suprafaţa se numesc vârfuri. Numerele a, b, c se numesc semiaxe. Intersecţiile dintre planele de coordonate şi elipsoid sunt respectiv următoarele elipse:

$$(\mathbf{1})\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}, (\mathbf{2})\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}, (\mathbf{3})\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}.$$



Intersectând elipsoidul cu plane paralele cu xOy, obţinem elipsele

$$(\mathbf{4})\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}-1=0 \\ z=k \end{cases}, \ k\in[-c,c]$$

care sunt asemenea cu elipsa ($\mathbf{1}$).

Teorema 8.4.3. *Elipsoidul este o mulţime mărginită şi închisă (deci compactă) în spaţiu.*

Demonstraţie. Din ecuaţia elipsoidului rezultă $\frac{x^2}{a^2}\le 1, \frac{y^2}{b^2}\le 1, \frac{z^2}{c^2}\le 1$ sau $-a\le x\le a, -b\le y\le b, -c\le z\le c$. Astfel, toate punctele elipsoidului sunt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturile de lungimi finite.

Elipsoidul $\sum$ este o mulţime închisă în spaţiu deoarece $\{1\}$ este o mulţime închisă în $\mathbf{R}$, $\sum=g^{-1}(1)$, iar $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, este o funcţie continuă de forma $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$. ■

Ecuaţia carteziană implicită a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ este echivalentă cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x=a\cos u\sin v \\ y=b\sin u\sin v \\ z=c\cos v \end{cases},$$

unde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$, cu u, v parametrii.

Definiţia 8.4.4. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

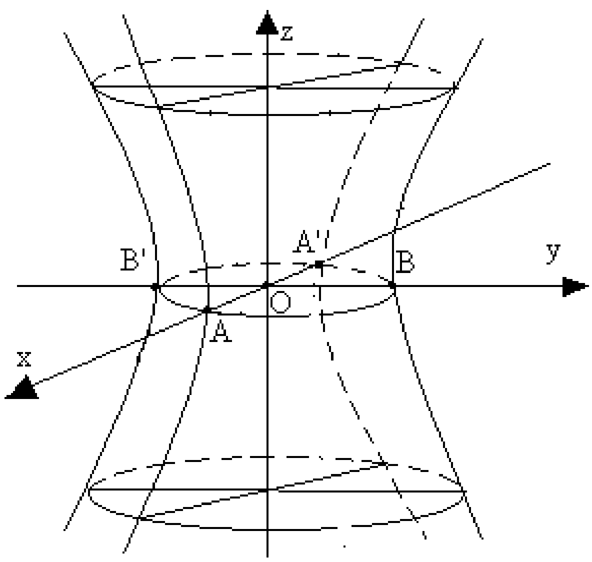
cu $a, b, c > 0$, se numeşte hiperboloid cu o pânză.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii cu elipsoidul. Are patru vârfuri. Intersecţiile lui $\sum$ cu $x = 0$ şi $y = 0$ sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Intersecţiile acestei suprafeţe cu planele $z = k$ sunt elipsele asemenea, reale oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}.$$



Se observă că hiperboloidul cu o pânză este o mulţime nemărginită şi închisă în spaţiu.

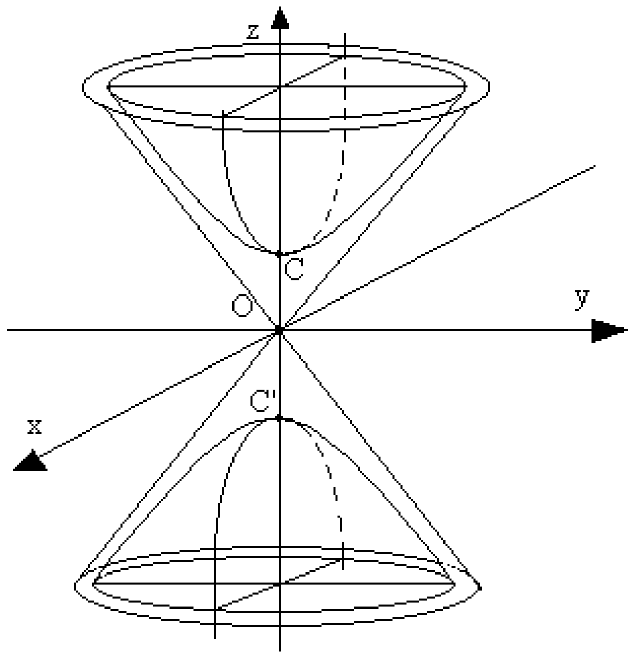
Cuadrica $\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ se numeşte conul asimptot al hiperboloidului cu o pânză.

Definiţia 8.4.5. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

cu $a, b, c > 0$, se numeşte hiperboloid cu două pânze.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii ca şi hiperboloidul cu o pânză. Are numai două vârfuri situate pe axa Oz.



Intersecţiile lui $\sum$ cu planele $x = 0$ şi $y = 0$ sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Se observă că pentru $c \in (-c, c)$, $\sum$ nu are puncte. Intersecţia suprafeţei cu planele $z = k$, $|k| \geq c$, ne dă elipsele asemenea

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(k^2-c^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2-c^2)} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

Hiperboloidul cu două pânze este o mulţime nemărginită şi închisă în spaţiu.

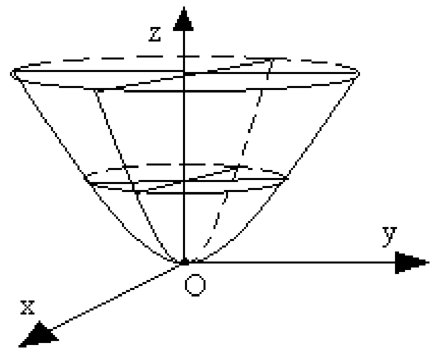
Cuadrica $\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, se numeşte conul asimptot al hiperboloidului.

Definiţia 8.4.6. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

cu $a, b > 0$, se numeşte paraboloid eliptic.

Planele de simetrie $x = 0$ şi $y = 0$ se numesc plane principale. Oz este axă de simetrie (axă principală) şi înţeapă suprafaţa în origine. Acest punct se numeşte vârf.



Intersecţiile suprafeţei cu planele $x = 0$ şi $y = 0$ sunt parabolele

$$\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

şi de aceea $\sum$ este nemărginită. Această suprafaţă există numai pentru $z \geq 0$.

Dacă tăiem suprafaţa $\sum$ cu planele $z = k$ $(k > 0)$ se obţin elipsele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}.$$

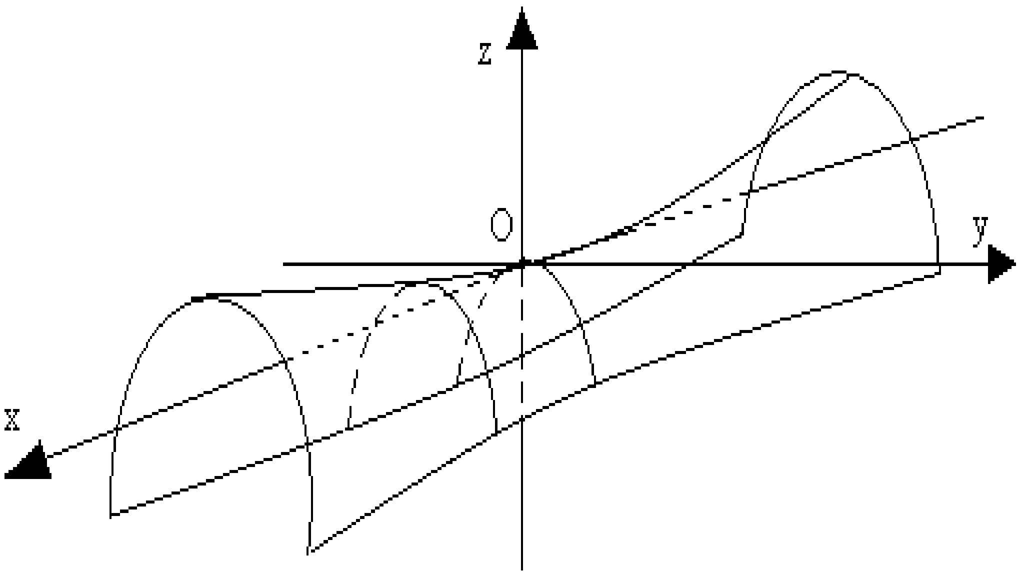
Paraboloidul eliptic este o mulţime închisă în spaţiu.

Definiţia 8.4.7. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

se numeşte paraboloid hiperbolic sau şa.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii ca şi suprafaţa anterioară. Originea este vârf al suprafeţei.



Intersecţia suprafeţei cu planul $x = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases},$$

care are concavitatea înspre sensul negativ al axei Oz. Intersecţia suprafeţei cu planul $y = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases},$$

care are axa de simetrie Oz şi este dirijată în sensul pozitiv al acestei axe.

Intersectăm suprafaţa cu planele $z = k$ $(k > 0)$ şi obţinem hiperbolele

$$\begin{cases} k = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ z = k \end{cases}$$

care au axa transversală paralelă cu Ox.

Intersectăm suprafaţa cu planele $z = k$ $(k < 0)$ şi obţinem hiperbolele

$$\begin{cases} k = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ z = k \end{cases}$$

care au axa netransversală paralelă cu Ox.

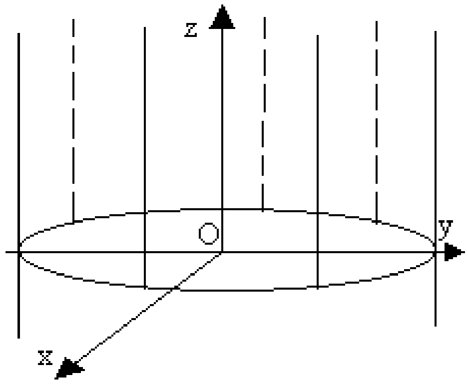
Ca mulţime, şaua este nemărginită şi închisă.

c) Cilindrul. Pereche de plane-concurente, paralele, confundate.Dreaptă. Punct. Mulţime vidă.

Definiţia 8.4.8. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

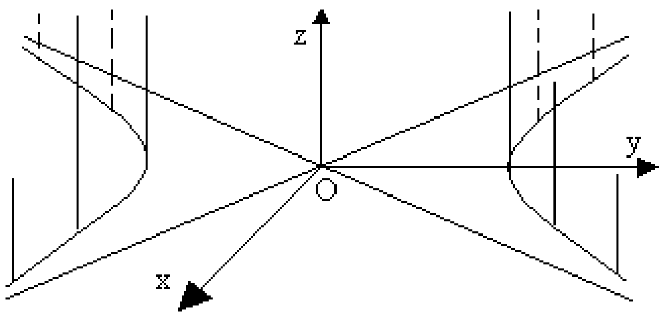
se numeşte cilindru eliptic.



Definiţia 8.4.9. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

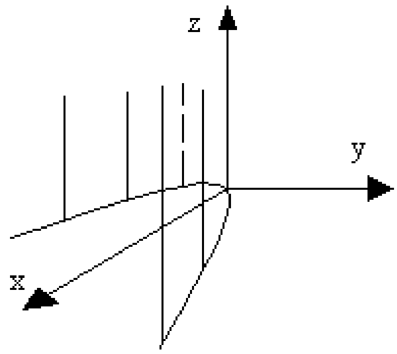
se numeşte cilindru hiperbolic.



Definiţia 8.4.10. *Cuadrica de ecuaţie*

$$\sum : y^2 = 2px$$

se numeşte cilindru parabolic.



Pereche de plane concurente $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;
pereche de plane paralele $x^2 - a^2 = 0$;
pereche de plane confundate $x^2 = 0$.
Dreaptă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;
punct $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$;
mulţimea vidă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *sau* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ *sau* $x^2 + a^2 = 0$.

Elipsoizii, hiperboloizii sau paraboloizii se numesc cuadrice nedegenerate. Hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic sunt suprafeţe riglate deoarece pot fi generate prin mişcarea unei drepte. Această dreaptă face parte dintr-o familie de generatoare rectilinii, fiecare dintre suprafeţele menţionate admiţând două familii de generatoare rectilinii, de ecuaţii

$$\mathbf{D}_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \text{ pentru } \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \neq 0, 1 + \frac{y}{b} \neq 0 \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases} \text{şi } \mathbf{D}_\infty \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 + \frac{y}{b} = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{D}_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \text{ pentru } \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \neq 0, 1 - \frac{y}{b} \neq 0 \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \text{şi } \mathbf{D}_\infty \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 - \frac{y}{b} = 0 \end{cases},$$

respectiv

$$\mathbf{D}_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda z \text{ pentru } z \neq 0, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0 \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \text{şi } \mathbf{D}_\infty \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{D}_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu z \text{ pentru } z \neq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0 \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \text{şi } \mathbf{D}_\infty \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}.$$

Partea III

Geometrie diferenţială

Capitolul 9

Curbe.

9.1 Vectori tangenţi. Câmpuri vectoriale.

a) Vectori tangenţi. Câmpuri vectoriale.

Fie $\mathbf{R}^n$ spaţiul vectorial (real) euclidian canonic care are dimensiunea n. Ca orice spaţiu vectorial euclidian, $\mathbf{R}^n$ este implicit un spaţiu punctual euclidian.

Fie P şi Q două puncte oarecare din $\mathbf{R}^n$ şi $\overrightarrow{PQ}$ vectorul tangent la $\mathbf{R}^n$ în punctul P. Vectorul $\overrightarrow{v} = Q - P$ se numeşte partea vectorială a vectorului tangent şi în loc de (P, Q) putem nota $\overrightarrow{v_P}$ sau chiar $\overrightarrow{v}$ dacă punctul de aplicaţie se subînţelege.

Doi vectori tangenţi $\overrightarrow{v_P}$ şi $\overrightarrow{w_Q}$ se numesc egali dacă au aceeaşi parte vectorială, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ şi au acelaşi punct de aplicaţie $P = Q$. Doi vectori $\overrightarrow{v_P}$ şi $\overrightarrow{w_Q}$ care au aceeaşi parte vectorială, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$, dar care au puncte de aplicaţie diferite se numesc paraleli.

Fixăm un punct $P \in \mathbf{R}^n$ şi considerăm toţi vectorii tangenţi la $\mathbf{R}^n$ în P. Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbf{R}^n$ în P se numeşte spaţiul tangent la $\mathbf{R}^n$ în P şi se notează cu $T_P\mathbf{R}^n$. Acest spaţiu se organizează ca spaţiu vectorial cu operaţiile de adunare a vectorilor şi înmulţire a lor cu scalari. Astfel, ca spaţiu vectorial $T_P\mathbf{R}^n$ este izomorf cu $\mathbf{R}^n$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $\overrightarrow{v} \longleftrightarrow \overrightarrow{v_P}$. Toate operaţiile cu vectori introduse în $\mathbf{R}^n$ se transpun în mod identic în spaţiul $T_P\mathbf{R}^n$.

O funcţie $\overrightarrow{V}$ care asociază fiecărui punct P al lui $\mathbf{R}^n$ un vector $\overrightarrow{V}(P)$ tangent la $\mathbf{R}^n$ în P se numeşte câmp vectorial.

Dacă funcţia $\overrightarrow{V}$ este constantă, atunci câmpul se numeşte paralel. Câmpurile paralele $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, ..., \overrightarrow{U_n}$ definite prin $\overrightarrow{U_1}(P) = (1, 0, ..., 0)_P, \overrightarrow{U_2}(P) = (0, 1, ..., 0)_P, ..., \overrightarrow{U_n}(P) = (0, 0, ..., 1)_P$, se numesc câmpuri fundamentale, iar ansamblul lor se numeşte câmpul reperului natural.

Teorema 9.1.1. *Dacă $\overrightarrow{V}$ este câmp vectorial pe $\mathbf{R}^n$, atunci există n funcţii reale $v_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, astfel încât*

$$\overrightarrow{V} = v_1 \overrightarrow{U_1} + ... + v_n \overrightarrow{U_n}.$$

Funcţiile v_i se numesc coordonatele euclidiene ale câmpului $\overrightarrow{V}$.

Algebra câmpurilor vectoriale se construieşte pe baza următoarelor operaţii definite punctual:

$$\left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)(P) = \overrightarrow{V}(P) + \overrightarrow{W}(P),$$

$$\left(f\overrightarrow{V}\right)(P) = f(P)\,\overrightarrow{V}(P).$$

Se definesc de asemenea produsul scalar, produsul vectorial şi produsul mixt al câmpurilor vectoriale.

$\overrightarrow{V}$ se numeşte diferenţiabil dacă coordonatele sale sunt diferenţiabile.

În continuare presupunem că folosim numai câmpuri vectoriale diferenţiabile.

b) Derivata covariantă.

Presupunem că toate funcţiile utilizate sunt diferenţiabile (de clasă C^∞).

1. Fie $\mathbf{D}$ o mulţime deschisă din $\mathbf{R}^n$ şi $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ o funcţie reală. Fie $P \in \mathbf{D}$ şi $\overrightarrow{v}$ un vector tangent la $\mathbf{D}$ în punctul P. Fixăm intervalul I şi alegem $t \in I$ astfel încât $P + tV \in \mathbf{D}$, unde V este punctul corespunzător vectorului $\overrightarrow{v}$. Se observă uşor că aplicaţia $t \to P + tV$ reprezintă restricţia ecuaţiei unei drepte şi dacă f este diferenţiabilă, atunci funcţia compusă $t \to f(P + tV)$ este tot diferenţiabilă.

Definiţia 9.1.1. *Numărul*

$$D_{\overrightarrow{v}} f(P) = \frac{d}{dt} f(P + tV)\,/_{t=0}$$

se numeşte derivata lui f în raport cu $\overrightarrow{v}$.

Numărul $D_{\overrightarrow{v}} f(P)$ indică cantitativ schimbarea lui $f(P)$ când P se mişcă în sensul lui $\overrightarrow{v}$. Dacă $\overrightarrow{v}$ este un versor, atunci $D_{\overrightarrow{v}} f$ poartă numele de derivata lui f după direcţia $\overrightarrow{v}$.

Lema 9.1.1. *Dacă $\overrightarrow{v_P} = (v_1, ..., v_n)_P$, atunci*

$$D_{\overrightarrow{v}} f(P) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = \left(\overrightarrow{v}, \nabla f(P)\right) = df(P)\left(\overrightarrow{v}\right),$$

unde ∇f este gradientul lui f, iar df este diferenţiala lui f.

Teorema 9.1.2. *Fie $f, g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in T_P\mathbf{D}$ şi $a, b \in \mathbf{R}$. Avem*

$$\begin{aligned} &D_{a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}} f(P) = aD_{\overrightarrow{v}} f(P) + bD_{\overrightarrow{w}} f(P), \\ &D_{\overrightarrow{v}}(af + bg)(P) = aD_{\overrightarrow{v}} f(P) + bD_{\overrightarrow{v}} g(P), \\ &D_{\overrightarrow{v}}(fg)(P) = g(P) D_{\overrightarrow{v}} f(P) + f(P) D_{\overrightarrow{v}} g(P). \end{aligned}$$

2. Noţiunea pe care o introducem în continuare generalizează derivata $D_{\overrightarrow{v}} f(P)$ şi reprezintă o operaţie asupra câmpurilor vectoriale.

Observaţia 9.1.1. Funcţia $D_{\overrightarrow{v}} f$ se numeşte derivata funcţiei f în raport cu câmpul $\overrightarrow{V}$ şi are aceleaşi proprietăţi ca $D_{\overrightarrow{v}} f$.

Fie $\overrightarrow{W}$ câmpul vectorial definit pe mulţimea deschisă $\mathbf{D}$ din $\mathbf{R}^n$ şi $\overrightarrow{v}$ un vector tangent la $\mathbf{D}$ în punctul P. Considerăm funcţia compusă $t \to \overrightarrow{W}(P + tV)$, unde $t \in I$ şi este determinat de condiţia $P + tV \in \mathbf{D}$.

Definiţia 9.1.2. *Vectorul*

$$D_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{W}(P) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{W}(P + tV)\,/_{t=0}$$

tangent la $\mathbf{D}$ în punctul P se numeşte derivata covariantă a lui $\overrightarrow{W}$ în raport cu $\overrightarrow{v}$.

Noţiunea anterior introdusă se bucură de aceleaşi proprietăţi ca cele din teorema 9.1.2.

Această noţiune se poate extinde considerând derivata covariantă a unui câmp vectorial $\overrightarrow{W}$ în raport cu câmpul $\overrightarrow{V}$. Rezultatul este un câmp vectorial care se notează cu $D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{W}$ şi a cărui valoare în P este $D_{\overrightarrow{V}(P)} \overrightarrow{W}(P)$.

Dacă

$$\overrightarrow{W} = w_1 \overrightarrow{U_1} + ... + w_n \overrightarrow{U_n},$$

atunci

$$D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{W} = \left(D_{\overrightarrow{V}} w_1\right) \overrightarrow{U_1} + ... + \left(D_{\overrightarrow{V}} w_n\right) \overrightarrow{U_n}.$$

În baza celor prezentate mai înainte, rezultă că $D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{W}$ are următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} &D_{f\overrightarrow{V}+g\overrightarrow{W}} \overrightarrow{Y} = fD_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Y} + gD_{\overrightarrow{W}} \overrightarrow{Y}, \\ &D_{\overrightarrow{V}}\left(a\overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{Z}\right) = aD_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Y} + bD_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Z}, \\ &D_{\overrightarrow{V}}\left(f\overrightarrow{Y}\right) = \left(D_{\overrightarrow{V}} f\right) \overrightarrow{Y} + f\left(D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Y}\right), \\ &D_{\overrightarrow{V}}\left(\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}\right) = \left(D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}\right) + \left(\overrightarrow{Y}, D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{Z}\right). \end{aligned}$$

Observaţia 9.1.2. În derivata covariantă $D_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{W}$, rolul lui $\overrightarrow{V}$ este algebric, iar $\overrightarrow{W}$ este cel care se derivează.

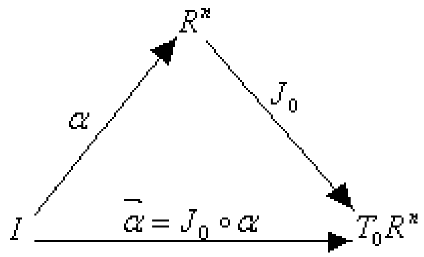
Observaţia 9.1.3. Derivatele covariante ale câmpurilor fundamentale $\overrightarrow{U_i}$, $i = \overline{1, n}$ sunt nule.

9.2 Curbe. Definiţii, exemple.

Fie $\mathbf{R}^n$ spaţiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_P\mathbf{R}^n$ spaţiul tangent în punctul P la $\mathbf{R}^n$ şi $J_P : \mathbf{R}^n \to T_P\mathbf{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I un interval deschis (alteori închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din $\mathbf{R}$.

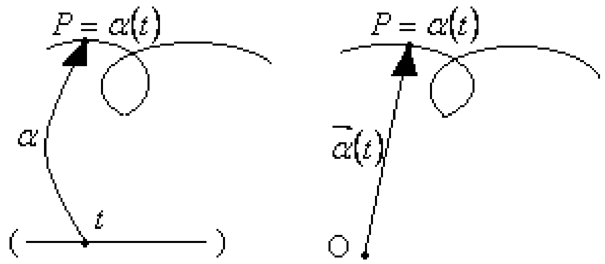
Definiţia 9.2.1. *O funcţie diferenţiabilă $\alpha : I \to \mathbf{R}^n$ se numeşte curbă parametrizată (drum) şi se notează cu (I, α).*

Imaginea $\alpha(I) \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte suportul curbei parametrizate (a drumului). α se numeşte parametrizare, iar $t \in I$ se numeşte parametru. De asemenea menţionăm că deşi consideraţiile teoretice se fac în $\mathbf{R}^n$ imaginile grafice aparţin lui $\mathbf{R}^n$ sau $\mathbf{R}^3$.



Observaţia 9.2.1. Reperul $(1, 0, ..., 0)_P, (0, 1, ..., 0)_P, ..., (0, 0, ..., 1)_P$ se numeşte reper natural (canonic), iar coordonatele unui vector în raport cu acest reper se numesc coordonate euclidiene.

Observând compunerea marcată anterior din care rezultă că lui α putem să-i ataşăm o funcţie şi numai una de tipul $\overrightarrow{\alpha} : I \to T_0\mathbf{R}^n$, ceea ce permite să privim mulţimea $\alpha(I)$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\overrightarrow{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a lui $\mathbf{R}^n$ (a se vedea figurile următoare)



Din definiţia lui $\alpha(I)$ rezultă echivalenţa:

$$P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists\, t \in I,\ P \in \alpha(t).$$

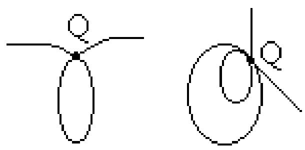
Dacă raportăm pe $\mathbf{R}^n$ la baza canonică, atunci funcţiile α şi $\overrightarrow{\alpha}$ sunt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene

$$\begin{array}{l} \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\ t \in I, \\ \overrightarrow{\alpha(t)} = x_1(t)\,\overrightarrow{e_1} + x_2(t)\,\overrightarrow{e_2} + ... + x_n(t)\,\overrightarrow{e_n},\ t \in I. \end{array}$$

În contextul în care α este numită curbă parametrizată, relaţiile $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$,...,$x_n = x_n(t)$ se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei, iar $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha(t)}$ se numeşte ecuaţia vectorială a curbei.

Definiţia 9.2.2. *Un punct P al lui α se numeşte simplu dacă există o singură valoare $t \in I$ astfel ca $\alpha(t) = P$. Dacă există mai multe valori distincte t astfel ca $\alpha(t) = P$, atunci punctul P se numeşte multiplu.*

De exemplu, dacă există numerele $t_1 \neq t_2$ şi numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = Q$, atunci punctul Q se numeşte dublu. Dacă există trei numere distincte t_1, t_2, t_3 şi numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3) = Q$, atunci punctul Q se numeşte triplu.



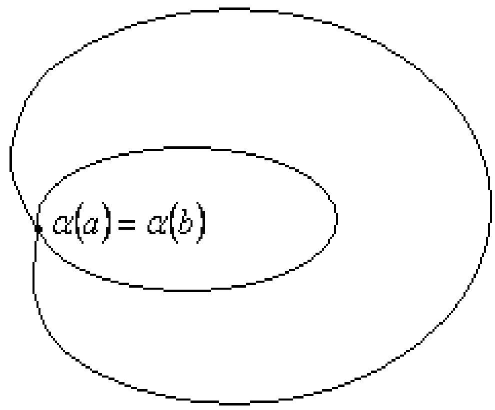
În general, cardinalul mulţimii $\alpha^{-1}(P)$ se numeşte multiplicitatea punctului P.

Dacă toate punctele unei curbe parametrizate (I, α) sunt simple, atunci după definiţiile anterioare, aplicaţia α este injectivă. Admitem în acest caz următoarea definiţie.

Definiţia 9.2.3. *Dacă funcţia $\alpha : I \to \mathbf{R}^n$ este diferenţiabilă şi injectivă, atunci (I, α) se numeşte curbă parametrizată simplă.*

Să presupunem că avem o funcţie de tipul $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Această funcţie se numeşte diferenţiabilă dacă poate fi extinsă diferenţiabil la un interval deschis ce conţine $[a, b]$.

Definiţia 9.2.4. *Dacă pentru funcţia diferenţiabilă $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ are loc $\alpha(a) = \alpha(b)$, atunci (I, α) se numeşte curbă parametrizată închisă.*



Această definiţie nu are acelaşi conţinut cu definiţia topologică a unei mulţimi închise. Într-adevăr, pentru orice funcţie $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, imaginea $\alpha([a,b])$ este închisă în $\mathbf{R}^n$ în sens topologic, deoarece α este implicit o funcţie continuă, dar aceasta nu are nici o legătură cu condiţia $\alpha(a) = \alpha(b)$.

O curbă parametrizată închisă pentru care restricţia la $[a,b)$ este injectivă se numeşte curbă parametrizată simplă şi închisă.

O curbă parametrizată (I,α) se numeşte periodică dacă există un număr $T > 0$, astfel încât $t + T \in I$, $\alpha(t+T) = \alpha(t)$, $\forall\ t \in I$. Cel mai mic număr T care se bucură de această proprietate se numeşte perioada lui α. Se poate demonstra că imaginea unei curbe parametrizate închise admite o reprezentare parametrică periodică.

Exemplul 9.2.1. Fie $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ şi $Q = (q_1, q_2, ..., q_n) \neq O(0,0,...,0)$ două elemente fixate în $\mathbf{R}^n$.

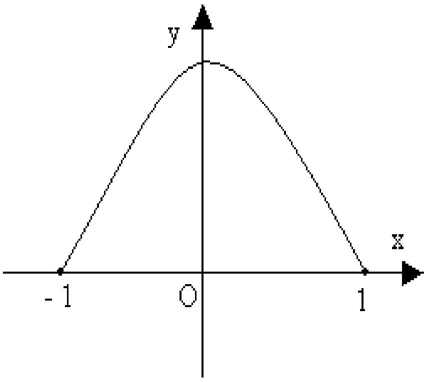
Curba parametrizată (I,α), unde $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, dată de $\alpha(t) = P + tQ = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, ..., p_n + tq_n)$, se numeşte dreaptă determinată de punctul $P = \alpha(0)$ şi direcţia Q. Cele n ecuaţii parametrice $x_i = p_i + tq_i$, $i = \overline{1,n}$, sunt echivalente cu $n-1$ ecuaţii carteziene în $\mathbf{R}^n$:

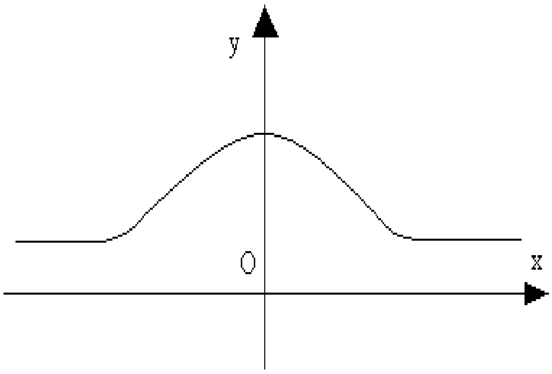
$$\frac{x_1 - p_1}{q_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2} = ... = \frac{x_n - p_n}{q_n},$$

cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Hiperplanul ce trece prin punctul P şi pentru care Q reprezintă o direcţie normală este o submulţime a lui $\mathbf{R}^n$ caracterizată prin ecuaţia carteziană implicită $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i (x_i - p_i) = 0$.

Exemplul 9.2.2. Graficul unei funcţii diferenţiabile de tipul $f : I \to \mathbf{R}$ este o curbă parametrizată în plan, deoarece acest grafic poate fi privit ca imaginea funcţiei $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$. O curbă parametrizată de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică şi nici închisă, deoarece $t_1 \neq t_2$ implică existenţa punctelor $(t_1, f(t_1))$ şi $(t_2, f(t_2))$ care nu pot fi identice (au abscise diferite).

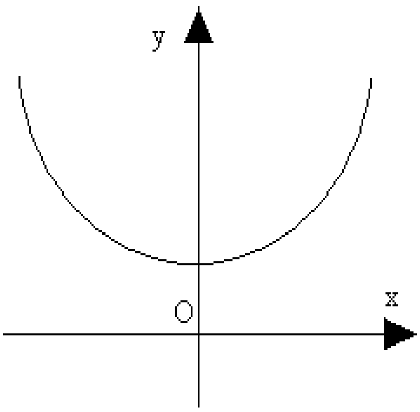


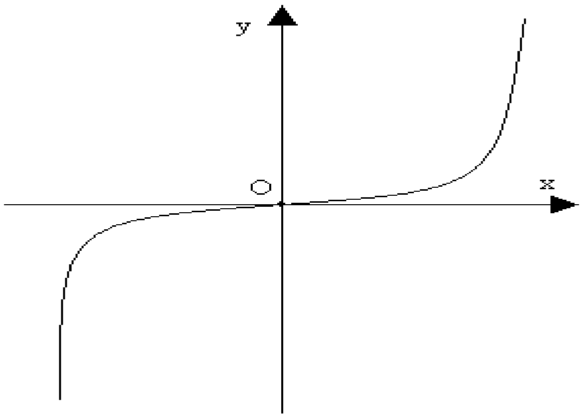


Prima figură reprezintă graficul curbei parametrizate de ecuaţie

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| \leq 1 \end{cases},$$

iar cea de a doua figură reprezintă graficul "Curbei lui Gauss", adică $y = e^{-x^2}$. Următoarele două grafice sunt ale funcţiilor "Lănţişor", $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ şi respectiv "Parabola cubică", $y = ax^3$.

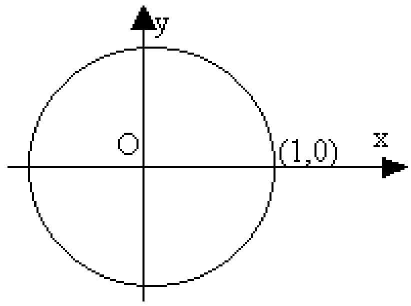




$y = f(x)$ se numeşte ecuaţia carteziană explicită a curbei parametrizate (I, α) cu $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.

În practică se întâlnesc şi curbe parametrizate (I, α), unde $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (g(t), t)$, $t \in I$, cărora le corespund ecuaţiile carteziene explicite de forma $x = g(y)$.

Exemplul 9.2.3. Fie curba parametrizată (I, α) cu $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Deoarece $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$, curba parametrizată este închisă. Imaginea $\alpha([0,2\pi])$ este cercul cu centrul în origine şi de rază unu.



Restricţia lui α la $[0,2\pi)$ este o funcţie injectivă şi deci (I,α), pentru $\alpha:[0,2\pi)\to\mathbf{R}^2$ este o curbă parametrizată simplă şi închisă.

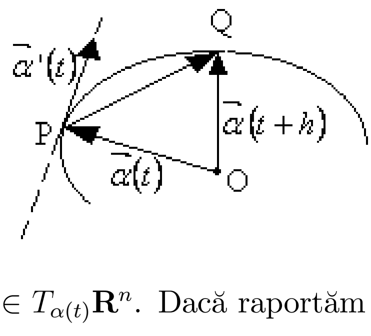
Să considerăm acum funcţia $\alpha:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$, $\alpha(t)=(\cos t,\sin t)$. Imaginea $\alpha(\mathbf{R})$ este tot cercul de rază unu şi cu centrul în origine. Observăm însă că în acest caz, $\alpha(t)=\alpha(t+2\pi)$ şi de aceea, cercul poate fi privit ca imaginea unei curbe parametrizate periodice cu perioada $T=2\pi$. În acest sens toate punctele cercului sunt puncte multiple.

9.3 Tangenta. Planul normal.

Fie (I,α) o curbă parametrizată, cu $\alpha:I\to\mathbf{R}^n$. Notăm cu t o variabilă din I şi $\alpha(t)=P$, $\alpha(t+h)=Q$, $t+h\in I$. Construim derivata

$$\overrightarrow{\alpha'(t)}=\lim_{h\to0}\frac{\overrightarrow{\alpha(t+h)}-\overrightarrow{\alpha(t)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\overrightarrow{PQ}}{h}.$$

Vectorul $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ cu originea în $\alpha(t)=P$ apare ca poziţie limită a vectorului $\overrightarrow{PQ}$, când $Q\in\alpha(I)$ se apropie de P şi se numeşte vector viteză.



Este vizibil că $\overrightarrow{\alpha'(t)}\in T_{\alpha(t)}\mathbf{R}^n$. Dacă raportăm pe $\mathbf{R}^n$ la baza canonică, atunci:

$$\overrightarrow{\alpha'(t)}=x_1'(t)\overrightarrow{e_1}+x_2'(t)\overrightarrow{e_2}+...+x_n'(t)\overrightarrow{e_n}.$$

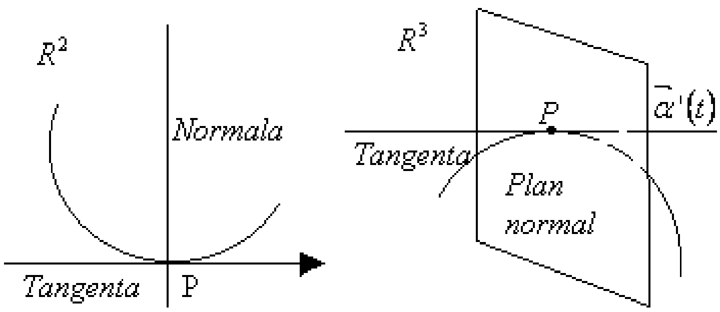
Definiţia 9.3.1. *Un punct $P = \alpha(t)$ al drumului suport al curbei parametrizate (I, α) în care $\overrightarrow{\alpha'(t)} \neq \overrightarrow{0}$ se numeşte punct regulat (al curbei). Dacă $\overrightarrow{\alpha'(t)} \neq \overrightarrow{0}$, $\forall\, t \in I$, atunci curba (I, α) se numeşte curbă parametrizată regulată.*

Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P şi vectorul $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul drumului suport al curbei.

Definiţia 9.3.1.' *Submulţimea $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte curbă (subvarietate unu dimensională) dacă pentru orice $M \in \mathcal{C}$, există o curbă parametrizată regulată (I, α) al cărei suport $\alpha(I)$ este o vecinătate deschisă a lui M în $\mathcal{C}$, iar aplicaţia $\alpha : I \to \alpha(I)$ este homeomorfism; curba parametrizată (I, α) cu această proprietate se numeşte parametrizare locală a curbei $\mathcal{C}$ în vecinătatea punctului M; dacă $\alpha(I) = \mathcal{C}$, parametrizarea (I, α) se numeşte globală, iar $\mathcal{C}$ se numeşte curbă simplă ($\alpha(I) \subseteq \mathcal{C}$ se mai numeşte arc elementar de curbă).*

Definiţia 9.3.2. *Fie P un punct regulat al curbei parametrizate (I, α). Dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ se numeşte tangenta la drumul suport al curbei (I, α) în P (o vom numi în continuare tangenta la curbă).*

Definiţia 9.3.3. *Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ se numeşte hiperplan normal la drumul suport al curbei parametrizată (I, α) în P (îl vom numi în continuare hiperplan normal la curbă).*



Pentru elementele descrise anterior avem următoarele ecuaţii:
tangenta

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x_1'(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2'(t)} = ... = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n'(t)},$$

hiperplanul normal

$$(x_1 - x_1(t))\, x_1'(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2'(t) + ... + (x_n - x_n(t))\, x_n'(t) = 0.$$

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat.

Definiţia 9.3.4. *Un punct $P = \alpha(t) \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\overrightarrow{\alpha'(t)} = 0$ se numeşte punct singular (al curbei).*

Se observă că dacă $\overrightarrow{\alpha'(t)} = 0$, $\forall\ t \in J \subset I$, atunci $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{c}, \forall\ t \in J$ şi astfel restricţia lui α la J se reduce la un punct. În consecinţă, dacă (I, α) admite puncte singulare şi nu se reduce la constante pe porţiuni, atunci aceste puncte sunt în general izolate. Dacă $\exists\ m > 1$ astfel ca $\overrightarrow{\alpha'(t)} = \overrightarrow{\alpha''(t)} = ... = \overrightarrow{\alpha^{(m-1)}(t)} = \overrightarrow{0}$ şi $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)} \neq \overrightarrow{0}$, atunci punctul P corespunzător se numeşte punct singular de ordinul m.

În vecinătatea unui punct singular de ordinul m formula lui Taylor ne dă următoarea egalitate:

$$\overrightarrow{\alpha(t+h)} = \overrightarrow{\alpha(t)} + \frac{h^m}{m!}\left[\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)} + \overrightarrow{\varepsilon(h)}\right], t + h \in I \text{ cu } \lim_{h \to 0} \overrightarrow{\varepsilon(h)} = \overrightarrow{0}.$$

Notând $P = \alpha(t)$ şi $Q = \alpha(t+h)$ avem:

$$\lim_{h \to 0} m! \frac{\overrightarrow{\alpha(t+h)} - \overrightarrow{\alpha(t)}}{h^m} = \lim_{h \to 0} m! \frac{\overrightarrow{PQ}}{h^m} = \overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}.$$

Vectorii $\overrightarrow{\alpha(t)}, \overrightarrow{\alpha(t+h)}$ au originea fixată în O, iar vectorii $\overrightarrow{\alpha'(t)}, \overrightarrow{\alpha''(t)}, ...,$ au originea fixată în extremitatea lui $\overrightarrow{\alpha(t)}$. Formula lui Taylor are sens pentru vectorii liberi corespunzători celor legaţi. Vectorul $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ se numeşte "vector tangent" la curba (I, α) în punctul singular P. Punctul P şi vectorul $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ definesc o dreaptă care este limita dreptei PQ când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul drumului suport al curbei.

Definiţia 9.3.5. *Fie P un punct singular de ordinul m. Dreapta determinată de punctul P şi vectorul $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ se numeşte tangenta la drumul suport al curbei (I, α) în punctul P.*

Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\overrightarrow{\alpha^{(m)}(t)}$ se numeşte hiperplan normal la drumul suport al curbei (I, α) în P.

Sumarul definiţiei 9.3.5. este următorul:

tangenta drumului suport al curbei în punctul P are ecuaţia:

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x_1^{(m)}(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2^{(m)}(t)} = ... = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n^{(m)}(t)},$$

iar hiperplanul normal la drumul suport al curbei în punctul P are ecuaţia:

$$(x_1 - x_1(t))\, x_1^{(m)}(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2^{(m)}(t) + ... + (x_n - x_n(t))\, x_n^{(m)}(t) = 0.$$

Observaţia 9.3.1. Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct regulat, rezultă că într-o vecinătate a lui P, α este injectivă. Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct singular de ordinul m rezultă că α nu este injectivă într-o vecinătate a lui P.

Observaţia 9.3.2. Un punct al unei curbe (I, α) poate fi simplu şi regulat sau simplu şi singular sau multiplu şi regulat sau multiplu şi singular.

Observaţia 9.3.3. Fie (I, α) şi (J, β) cu $\alpha : I \to \mathbf{R}^n, \beta : J \to \mathbf{R}^n$, două curbe parametrizate astfel încât $\alpha(I) \cap \beta(J) \neq \Phi$ şi fie $P \in \alpha(I) \cap \beta(J)$ un punct regulat sau singular de ordinul m. Unghiul dintre vectorii tangenţi la drumurile suport a celor două curbe în P se numeşte unghiul celor două curbe. Dacă cei doi vectori sunt perpendiculari curbele se numesc ortogonale. Dacă unghiul dintre cei doi vectori este zero sau π, atunci curbele se numesc tangente.

Observaţia 9.3.4. În cinematică o curbă este privită ca fiind traiectoria unui punct material în mişcare. În acest caz variabila t se numeşte timp, $\alpha(I)$ se numeşte traiectorie, $\overrightarrow{\alpha'(t)}$ se numeşte viteza curbei la momentul t, iar $\overrightarrow{\alpha''(t)}$ se numeşte acceleraţia curbei la momentul t.

b) Planul osculator.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$, $M(x, y, z)$ şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ două puncte pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$ şi $\overline{\tau}$ versorul tangentei la drumul suport al curbei în punctul M.

Definiţia 9.3.6. *Fie planul $\mathcal{P}$ ce conţine pe $\overline{\tau}$ şi M_1. Planul π, ce se obţine când $M_1 \to M$, se numeşte planul osculator la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (îl vom numi plan osculator la curbă).*

Observaţia 9.3.5. Din definiţie rezultă că π este poziţia limită a planului $\mathcal{P}$ ce trece prin M şi M_1 şi conţine $\overline{\tau}$, când $M_1 \to M$.

Teorema 9.3.1. *Dacă $\overline{r} = \overline{r(t)}$ este ecuaţia vectorială a curbei $\mathcal{C}$, iar ecuaţia tangentei în punctul t la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ este dată vectorial de $\overline{R} = \overline{r(t)} + \lambda \frac{d\overline{r}}{dt}$, $\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| \neq 0$, atunci ecuaţia planului osculator este dată de produsul mixt*

$$\left(\left(\overline{R} - \overline{r}\right), \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)\right) = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\overline{r(t)} = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j} + z(t)\,\overline{k}$, $t \in I$. Aplicând formula Taylor lui $x(t), y(t), z(t)$ obţinem

$$x(t) = x(t_1) + \frac{t - t_1}{1!} x'(t_1) + \frac{(t - t_1)^2}{2!} \left[x''(t_1) + \varepsilon_1(t)\right],$$

cu $\varepsilon_1 \to 0$ când $t_1 \to t$; avem şi

$$\begin{array}{l} y(t) = y(t_1) + \frac{t-t_1}{1!} y'(t_1) + \frac{(t-t_1)^2}{2!}\left[y''(t_1) + \varepsilon_2(t)\right], \\ z(t) = z(t_1) + \frac{t-t_1}{1!} z'(t_1) + \frac{(t-t_1)^2}{2!}\left[z''(t_1) + \varepsilon_3(t)\right], \end{array}$$

cu ε_2 şi $\varepsilon_3 \to 0$ când $t_1 \to t$; dacă înmulţim egalităţile precedente cu $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ obţinem

$$\overline{r(t)} = \overline{r(t_1)} + \frac{t-t_1}{1!}\frac{d\overline{r(t_1)}}{dt} + \frac{(t-t_1)^2}{2!}\left[\frac{d^2\overline{r(t_1)}}{dt^2} + \varepsilon\right],$$

cu $|\varepsilon| \to 0$ când $t_1 \to t$. Conform definiţiei 9.3.6., ecuaţia planului osculator se obţine scriind că vectorul $\overline{R} - \overline{r}$, situat în planul osculator, este

$$\lim_{M_1 \to M}\left[\frac{d\overline{r}}{dt} \times (\overline{r_1} - \overline{r})\right],$$

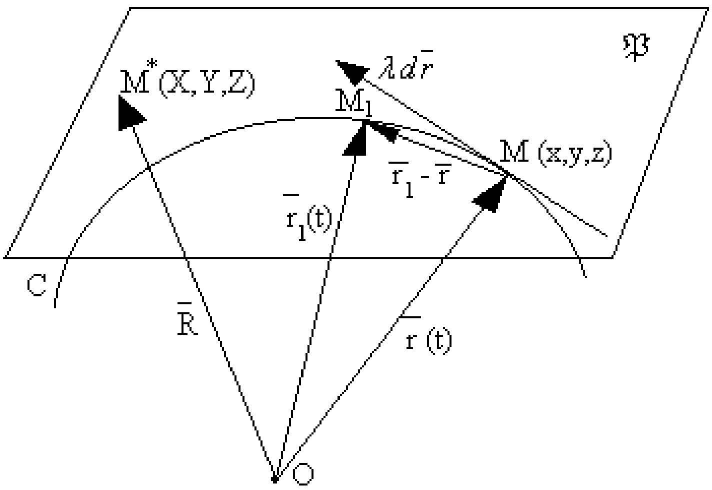
deci ecuaţia se scrie

$$\left(\left(\overline{R} - \overline{r}\right), \lim_{M_1 \to M}\left[\frac{d\overline{r}}{dt} \times \left\{\frac{t_1 - t}{1!}\frac{d\overline{r}}{dt} + \frac{(t_1 - t)^2}{2!}\left(\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} + \varepsilon\right)\right\}\right]\right) = 0\ ;$$

deoarece $|\varepsilon| \to 0$ când $M_1 \to M$ şi $\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{0}$, rămâne, înlăturând termenul $(t - t_1)^2$,

$$\left(\left(\overline{R} - \overline{r}\right), \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)\right) = 0.$$

■



Completare b.1. Din rezultatul obţinut rezultă că vectorul $\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ se găseşte în planul osculator.

Completare b.2. Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin ecuaţiile ei parametrice, planul osculator este definit de

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

sau folosind numai diferenţialele se obţine

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Completare b.3. Raţionamentul de mai sus funcţionează dacă $d\overline{r}$ nu este paralel cu $d^2\overline{r}$. Să arătăm că dacă acest fapt se întâmplă, curba $\mathcal{C}$ are drept suport geometric (drum suport) o dreaptă. Avem $d^2\overline{r} = \lambda d\overline{r}$, deci $x'' = \alpha x', y'' = \alpha y', z'' = \alpha z'$, sau $x = a_1 + b_1 e^{\alpha t}$, $y = a_2 + b_2 e^{\alpha t}$, $z = a_3 + b_3 e^{\alpha t}$ sau

$$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3}\ ,$$

deci o dreaptă.

Completare b.4. Dacă o curbă are toate punctele suportului său geometric (drumul suport) situate în planul osculator, acesta este o curbă plană.

c) Binormala.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$ şi $M(x,y,z)$ $\in$drumului suport al lui $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.3.7. *Se numeşte binormala în punctul M la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$, dreapta* **B** *perpendiculară pe planul osculator (o vom numi binormala la curbă).*

Teorema 4.4.2. *Ecuaţiile binormalei* **B** *în punctul M la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ sunt*

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}\ .$$

Demonstraţia teoremei rezultă imediat din definiţia binormalei.

Completare c.1. Versorul binormalei $\overline{\beta}$ este dirijat în aşa fel încât $\left(\overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta}\right)$ formează un triedru drept ($\overline{\nu}$ este versorul normalei principale). Avem deci relaţiile

$$\overline{\tau} = \overline{\nu} \times \overline{\beta},\ \overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau},\ \overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu}\ .$$

Completare c.2. Ecuaţia vectorială a binormalei este

$$\overline{R}-\overline{r}=\lambda\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\times\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right).$$

d) Normala principală.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă strâmbă, M $\in$drumului suport al curbei $\mathcal{C}$, $\overline{\tau}$ versorul tangentei, $\mathcal{N}$ planul normal şi π planul osculator la drumul suport al curbei în punctul M.

Definiţia 9.3.8. *Se numeşte normală principală la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M, normala la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$, drum suport situat în planul osculator dirijat după $d^2\overline{r}$ (o vom numi normala principală la curbă).*

Notăm cu $\overline{\nu}$ versorul normalei principale.

Teorema 9.3.3. *Ecuaţiile normalei principale sunt*

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}},$$

unde $l=\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $m=\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$, *toate derivatele fiind calculate în punctul $M(x,y,z)$.*

Demonstraţie. **1.** Dacă $\overline{r}$ este un versor variabil $\overline{r(t)}$, atunci avem că $\left(\overline{r(t)},\overline{r'(t)}\right)=0$, deci $\overline{r'(t)}$ este perpendicular pe $\overline{r(t)}$.

Într-adevăr, din relaţia $\left(\overline{r(t)},\overline{r(t)}\right)=1$, obţinem prin derivare

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r(t)},\overline{r(t)}\right)=2\left(\overline{r(t)},\overline{r'(t)}\right)=0.$$

2. Versorul $\overline{\nu}$ al normalei principale este perpendicular pe versorul $\overline{\tau}$ al tangentei la drumul suport al curbei în M, fiind situat în planul osculator, unde se află şi vectorii $d\overline{r}$ şi $d^2\overline{r}$, el este perpendicular şi pe produsul vectorial $d\overline{r}\times d^2\overline{r}$ sau pe $\frac{d\overline{r}}{dt}\times\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$.

Din faptul că dreapta $\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$ (cu $\overline{\nu}(a,b,c)$), este perpendiculară pe tangenta t, avem

$$ax'+by'+cz'=0\ ;$$

dacă este perpendiculară şi pe $\left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)$, obţinem $\left(\overline{\nu}, \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)\right) = 0$, adică

$$a \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0 ,$$

care ne dau

$$a = \lambda \begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}, \ b = \lambda \begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}, \ c = \lambda \begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}.$$

■

Observaţia 9.3.6. Se alege pentru sensul lui $\overline{\nu}$ sensul lui $d^2\overline{r}$.

Observaţia 9.3.7. Din relaţiile $(\overline{\nu}, \overline{\tau}) = 0$ şi $\left(\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right) = 0$, rezultă

$$\overline{\nu} = \lambda \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \lambda \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} , \ \lambda > 0.$$

Observaţia 9.3.8. Normala principală **n** este intersecţia între planul normal

$$x' (X - x) + y' (Y - y) + z' (Z - z) = 0$$

şi planul osculator

$$l (X - x) + m (Y - y) + n (Z - z) = 0.$$

e) Planul rectificant.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în $\mathbf{R}^3$şi $M (x, y, z)$ $\in$drumului suport al curbei $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.3.9. *Planul ce trece prin M şi este perpendicular pe normala principală se numeşte planul rectificant în punctul M al drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ (sau plan rectificator al curbei).*

Teorema 9.3.4. *Ecuaţia planului rectificant în punctul M este*

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

unde $l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$, *toate derivatele fiind calculate în punctul M.*

Demonstraţia rezultă din ecuaţiile normalei principale.

Completare e.1. Planul normal $\mathcal{N}$, planul osculator π şi planul rectificant $\mathcal{R}$ formează un sistem de trei plane rectangulare două câte două.

Completare e.2. Ecuaţia vectorială a planului rectificant este

$$\left(\overline{R}-\overline{r},\frac{d\overline{r}}{dt}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\times\frac{d^{2}\overline{r}}{dt^{2}}\right)\right)=0\ .$$

f) Elementul de arc al unei curbe în spaţiu.

Elementul de arc al unei curbe $\mathcal{C}$ este dat de

$$ds=\sqrt{dx^{2}+dy^{2}+dz^{2}}.$$

Teorema 9.3.5. **1.** *Dacă $\mathcal{C}$ este definită printr-o reprezentare parametrică*

$$x=x\left(t\right),y=y\left(t\right),z=z\left(t\right)\ ,\ t\in I,$$

atunci

$$ds=\sqrt{x'^{2}+y'^{2}+z'^{2}}dt.$$

2. *Dacă $\mathcal{C}$ este definită vectorial $\overline{r}=\overline{r\left(t\right)}$, $t\in I$,*

$$ds=\left|d\overline{r}\right|=\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|dt.$$

Demonstraţia rezultă din definiţia lui ds.

Observaţia 9.3.9. Dacă $t=s$, $\frac{d\overline{r}}{ds}=\overline{\tau}$ este versorul tangentei la drumul suport al curbei dirijat în sensul de creştere al arcelor; avem

$$d\overline{r}=\overline{\tau}ds \text{ sau } \left|\frac{d\overline{r}}{ds}\right|=1.$$

Observaţia 9.3.10. Cosinusurile directoare ale tangentei **t** la drumul suport al curbei sunt

$$\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\ .$$

Din definiţiile date anterior, rezultă:

1. planul normal $\mathcal{N}$ este determinat de versorul normalei principale $\overline{\nu}$ şi versorul binormalei $\overline{\beta}$;

2. planul osculator este determinat de versorul tangentei $\overline{\tau}$ şi versorul normalei principale $\overline{\nu}$;

3. planul rectificant (sau rectificator) este determinat de versorii tangentei $\overline{\tau}$ şi binormalei $\overline{\beta}$.

Triedrul format de $\left(\overline{\tau},\overline{\nu},\overline{\beta}\right)$ se numeşte triedrul Frenet.

9.4 Curbură. Torsiune. Formulele lui Frenet.

a) Curbură.

Indicator sferic. Se consideră o curbă $\mathcal{C}$ cu drumul suport situat în $\mathbf{R}^3$ şi o sferă $\mathcal{S}$ de rază 1, cu centrul în O. Fie M_1 şi M_2 două puncte pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$ şi fie $\overline{\tau}$ versorul tangentei la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M situat pe arcul M_1M_2 între cele două puncte. Fie $\overline{\tau'}$ un versor cu originea în O echipolent cu $\overline{\tau}$, deci cu extremitatea sa pe sfera $\mathcal{S}$ în punctul M'. Când M parcurge arcul M_1M_2, de la M_1 la M_2, punctul M' descrie pe sferă un arc $M_1'M_2'$.

Definiţia 9.4.1. *Arcul $M_1'M_2'$ se numeşte indicator sferic al tangentelor arcului M_1M_2 de pe drumul suport al lui $\mathcal{C}$.*

Definiţia 9.4.2. *Unghiul făcut de cele două tangente în M_1 şi M_2 este egal cu unghiul $\widehat{M_1'OM_2'}$ şi se numeşte unghiul de contingenţă al tangentelor în M_1 şi M_2.*

Curbură. Dacă notăm cu $s_{M_2}-s_{M_1}$ lungimea arcului M_1M_2 şi $\sigma_{M_2'}-\sigma_{M_1'}$ lungimea arcului $M_1'M_2'$ avem:

Definiţia 9.4.3. *Raportul*

$$K_m = \frac{\sigma_{M_2'} - \sigma_{M_1'}}{s_{M_2} - s_{M_1}}$$

se numeşte curbura medie a arcului M_1M_2.

Definiţia 9.4.4. *Când $M_2 \to M_1 = M$, curbura K_m are limita (dacă există) dată de*

$$K = \frac{d\sigma}{ds}$$

şi se numeşte curbura drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare curbura curbei).

Definiţia 9.4.5. *Inversa curburii*

$$\rho = \frac{1}{K}$$

se numeşte raza de curbură ρ a drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare raza de curbură a curbei).

Teorema 9.4.1. *Curbura curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M al drumului său suport este dată de*

$$\frac{1}{K} = \frac{d\theta}{ds} \ ,$$

unde $d\theta$ este diferenţiala unghiului de contingenţă al tangentelor.

Demonstraţie. Deoarece unghiul făcut de $\overline{\tau_1}$ cu $\overline{\tau_2}$ este unghiul făcut de vectorii echipolenţi $\overline{\tau'_1}$ cu $\overline{\tau'_2}$ şi cum raza sferei $\mathcal{S}$ este 1, rezultă

$$\overline{\tau_{M_2}} - \overline{\tau_{M_1}} = \theta_2 - \theta_1 \ ,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

b) Torsiune.

Indicatorul sferic al binormalelor la drumul suport al unei curbe $\mathcal{C}$ se construieşte în mod analog ca în cazul tangentelor. Dacă $\overline{\beta}$ este versorul binormalei la drumul suport al curbei $\mathcal{C}$ într-un punct M situat între punctele M_1 şi M_2, fie $\overline{\beta'}$ un versor cu originea în O, echipolent cu $\overline{\beta}$, deci cu extremitatea sa pe sfera $\mathcal{S}$ în punctul M''. Când M parcurge arcul M_1M_2 de la M_1 la M_2, punctul M'' descrie pe sferă un arc $M''_1M''_2$.

Definiţia 9.4.6. *Arcul $M''_1M''_2$ se numeşte indicator sferic al binormalelor arcului M_1M_2 de pe $\mathcal{C}$.*

Definiţia 9.4.7. *Unghiul făcut de cele două binormale în M_1 şi M_2 este egal cu unghiul $\widehat{M''_1OM''_2}$ şi se numeşte unghiul de contingenţă al binormalelor în M_1 şi M_2.*

Dacă notăm cu $s_{M_2} - s_{M_1}$ lungimea arcului M_1M_2 şi unghiul de contingenţă $\varphi_2 - \varphi_1$ al binormalelor, avem:

Definiţia 9.4.8. *Raportul*

$$\frac{1}{T_m} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{s_{M_2} - s_{M_1}}$$

se numeşte torsiunea medie a arcului M_1M_2.

Definiţia 9.4.9. *Când $M_2 \to M_1 = M$, $\frac{1}{T_m}$ are limita $\frac{1}{T}$ (dacă există) dată de*

$$\frac{1}{T} = \frac{d\varphi}{ds} \ ,$$

care se numeşte torsiunea drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare torsiunea curbei).

Definiţia 9.4.10. *Inversa torsiunii în punctul M*

$$T = \frac{ds}{d\varphi}$$

se numeşte raza de torsiune a drumului suport al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M (o vom numi în continuare raza de torsiune a curbei).

c) Formulele lui Frenet.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă şi M un punct situat pe drumul său suport din $\mathbf{R}^3$. Folosind notaţiile precedente, adică $\overline{\tau}$ reprezintă versorul tangentei, $\overline{\nu}$ versorul normalei principale, iar $\overline{\beta}$ versorul binormalei, are loc următorul rezultat.

Teorema 9.4.2. *Între versorii triedrului Frenet,* $\frac{1}{\rho}$ *şi* $\frac{1}{T}$ *există următoarele relaţii:*

1. $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}$,
2. $\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{\overline{\nu}}{T}$,
3. $\frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho} + \frac{\overline{\beta}}{T}$,

numite formulele lui Frenet.

Demonstraţie. **1.** Avem

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds}, \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \overline{\nu} = \lambda\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \ \lambda > 0$$

($\overline{r} = \overline{r\,(t)}$ este ecuacţia vectorială a curbei $\mathcal{C}$), deci

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \lambda^{-1}\overline{\nu}, \quad \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right| = \lambda^{-1},$$

pentru că $|\overline{\nu}| = 1$. Dar $d\sigma$ este elementul de arc al indicatorului sferic al tangentelor, rezultă

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho}\text{şi } \frac{1}{\lambda} = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d\overline{\tau}}{d\sigma}\right| \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho} ,$$

de unde rezultă că $\lambda = \rho$ $\left(\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho};\ \text{iar } \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right| = 1 \text{ deoarece } |d\overline{\tau}| = d\sigma\right)$. Deci

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho} ,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. Avem relaţia $\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu}$, pe care o derivăm în raport cu s:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \overline{\nu} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{\nu}}{ds} = \overline{\tau} \times \frac{d\overline{\nu}}{ds} ,$$

deoarece $\frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \overline{\nu} = \frac{1}{\rho}\overline{\nu} \times \overline{\nu} = \overline{0}$, în conformitate cu punctul 1. al teoremei.

Avem şi $\overline{\nu} \times \frac{d\overline{\nu}}{ds} = \overline{0}$, deci $\frac{d\overline{\nu}}{ds} = \lambda'\overline{\tau} + \mu\overline{\beta}$, de unde

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\mu\left(\overline{\beta} \times \overline{\tau}\right) = -\mu\overline{\nu} \quad (\mu > 0)\,, \tag{9.4.1}$$

relaţie care în modul este egală cu $\left|\frac{d\overline{\beta}}{ds}\right| = \mu = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}$, deci

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{\overline{\nu}}{T}\ .$$

3. Pornind de la relaţia $\overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau}$, pe care o derivăm în raport cu s şi obţinem

$$\frac{d\overline{\nu}}{ds} = \frac{d\overline{\beta}}{ds} \times \overline{\tau} + \overline{\beta} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds}\ ,$$

însă $\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{\overline{\nu}}{T}$, $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}$, care ne dau

$$\frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\nu}}{T} \times \overline{\tau} + \overline{\beta} \times \frac{\overline{\nu}}{\rho} = \frac{\overline{\beta}}{T} - \frac{\overline{\nu}}{\rho}\ ,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

d) Aplicaţii ale formulelor Frenet.

d.1. *Drumul suport al unei curbe $\mathcal{C}$, situat în $\mathbf{R}^3$ este o dreaptă dacă şi numai dacă*

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru o dreaptă unghiul de contingenţă este zero, deci

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = 0.$$

Reciproc, din $\frac{1}{\rho} = 0$, obţinem în prima formulă Frenet $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = 0$ sau $\frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2} = 0$, deci $\overline{r} = s\overline{\tau_0} + \overline{r_0}$ care reprezintă o dreaptă

$$x = x_0 + as,\ y = y_0 + bs,\ z = z_0 + cs,$$

sau

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

şi astfel teorema este complet demonstrată. ■

d.2. *O curbă este "plană" dacă şi numai dacă*

$$\frac{1}{T} = 0.$$

Demonstraţie. Dacă curba este plană, unghiul de contingenţă al binormalelor la drumul său suport este zero, deci $d\varphi = 0$; din definiţia torsiunii

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}$$

rezultă
$$\frac{1}{T} = 0.$$

Reciproc, deoarece $\frac{1}{T} = 0$, din a doua formulă Frenet se obţine

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\overline{\nu}, d\overline{\beta} = \overline{0}, \overline{\beta} = \overline{\beta_0}, \left(\overline{\tau}, \overline{\beta}\right) = \left(\overline{\tau}, \overline{\beta_0}\right) = 0,$$

deoarece $\overline{\tau} \perp \overline{\beta}$. Obţinem $\left(\frac{d\overline{r}}{ds}, \overline{\beta_0}\right) = 0$ şi din faptul că $\overline{\beta_0} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$ rezultă $a\ dx + b\ dy + c\ dz = 0$, sau $ax + by + cz = d$, adică un plan, ecuaţie verificată de toate punctele drumului suport al lui $\mathcal{C}$, deci $\mathcal{C}$ este o curbă plană. ■

Observaţia 9.4.1. O curbă plană are drept plan osculator la drumul său suport chiar planul acestuia. Torsiunea este nulă, $\frac{1}{T} = 0$. În acest caz, formulele Frenet devin
$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}, \ \frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho}\ .$$

e) Expresia analitică a curburii.

Din prima formulă a lui Frenet avem: $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{\nu}}{\rho}$, $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, deci $\overline{\nu} = \rho\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$ aşadar
$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu} = \rho\overline{\tau} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \rho\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \tag{9.4.2}$$

adică
$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|$$

(lucru care se obţine luând modulul relaţiei (9.4.2) şi ţinând cont că $\left|\overline{\beta}\right| = 1$).

Observaţia 9.4.2. Curbura se mai scrie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{ds^3}\left[\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Observaţia 9.4.3. Este cunoscută formula pentru aria paralelogramului de laturi
$$\frac{d\overline{r}}{ds} \text{şi } \frac{d^2\overline{r}}{ds^2},$$
anume
$$\left|\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d\overline{r}}{ds}\right| \left|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right| \sin\theta\ ,$$

însă $\left|\frac{d\overline{r}}{ds}\right| = 1$ şi $\frac{d\overline{r}}{ds} \perp \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$ şi

$$\frac{1}{\rho} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

f) Expresia analitică a torsiunii.

Pornind de la a treia formulă Frenet

$$\frac{d\overline{\nu}}{ds} = -\frac{\overline{\tau}}{\rho} + \frac{\overline{\beta}}{T},$$

avem

$$\left(\overline{\beta}, \frac{d\overline{\nu}}{ds}\right) = \frac{1}{T}\left(\overline{\beta}, \overline{\beta}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\overline{\tau}, \overline{\beta}\right).$$

Dar $\left(\overline{\beta}, \overline{\beta}\right) = 1$ şi $\left(\overline{\tau}, \overline{\beta}\right) = 0$, rezultă

$$\left(\overline{\beta}, \frac{d\overline{\nu}}{ds}\right) = \frac{1}{T}\ ,\ \overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu} = \frac{d\overline{r}}{ds} \times \overline{\nu}\ . \tag{9.4.3}$$

Avem $\overline{\beta} = \frac{d\overline{r}}{ds} \times \left(\rho \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right) = \rho\left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right)$ şi $\overline{\nu} = \rho\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \rho\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$; $\frac{d\overline{\nu}}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} + \rho\frac{d^3\overline{r}}{ds^3}$. Înlocuind în (9.4.3) pe $\overline{\beta}$ şi $\frac{d\overline{\nu}}{ds}$ se obţine

$$\left(\rho\left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right), \frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} + \rho\frac{d^3\overline{r}}{ds^3}\right) = \frac{1}{T}$$

care ne dă expresia torsiunii.

Următoarele forme sunt echivalente:

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(d\overline{r}, d^2\overline{r}, d^3\overline{r}\right)}{\left|d\overline{r} \times d^2\overline{r}\right|^2}\ ,\ \frac{1}{T} = \frac{\left(\frac{d\overline{r}}{ds}, \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\overline{r}}{ds^3}\right)}{\left|\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|^2}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2},$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\frac{d\overline{r}}{dt}, \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}, \frac{d^3\overline{r}}{dt^3}\right)}{\left|\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right|^2},$$

unde prin $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$ s-a notat produsul mixt al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$.

Capitolul 10

Suprafeţe.

10.1 Noţiunea de suprafaţă.

Definiţia 10.1.1. *Se numeşte suprafaţă parametrizată şi se notează cu* $(D, r) = \overline{r}(u, v) \in \mathbf{E}_3$*-numit modelul aritmetic al spaţiului euclidian asociat lui* $\mathbf{R}^3$ *, o aplicaţie* $r : D \to \mathbf{R}^3$ *care este o funcţie vectorială* $\overline{r}(u, v)$ *netedă şi regulată, cu domeniul* $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

Domeniul $r(D) \subset \mathbf{R}^3$ se numeşte imaginea sau suportul suprafeţei parametrizate (D, r).

Definiţia 10.1.2. *Suprafeţele parametrizate* (D, r) *şi* (D_1, r_1) *se numesc echivalente dacă există difeomorfismul* $\lambda : D \to D_1$ *încât* $r = r_1 \circ \lambda$*; difeomorfismul* λ *se numeşte schimbare de parametri (deoarece* λ *este difeomorfism imaginile a două suprafeţe parametrizate echivalente coincid).*

Definiţia 10.1.3. *Submulţimea* $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ *se numeşte suprafaţă (geometrică=subvarietate 2-dimensională în* $\mathbf{E}_3$*), dacă* $\forall M \in \mathcal{S}$*, există o vecinătate a sa* $W \subseteq \mathcal{S}$ *şi o suprafaţă parametrizată* (D, r) *astfel că* $r(D) = W$*, iar aplicaţia* $r : D \to W$ *este homeomorfism; perechea* (D, r) *se numeşte parametrizare locală alui* $\mathcal{S}$ *într-o vecinătate a punctului* M*, iar* $r(D) = W$ *se numeşte domeniul parametrizării.*

Suprafaţa $\mathcal{S}$ definită anterior se zice că este o suprafaţă simplă. În cazul când $r(D) = \mathcal{S}$ se zice că avem o parametrizare globală.

Definiţia 10.1.4. *Fie funcţia* $F(x, y, z)$ *de clasă* $C^{(k)}$ *pe deschisul* $V \subseteq \mathbf{R}^3$*, deci netedă; submulţimea*

$$\mathcal{S} = \{\ (x, y, z) \in V \mid F(x, y, z) = 0\ \}$$

se numeşte suprafaţă de nivel a funcţiei F*.*

Ecuaţia

$$F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in V \subset \mathbf{R}^3 \tag{10.1.1}$$

se numeşte ecuaţia implicită a suprafeţei $\mathcal{S}$.

În general $\mathcal{S}$ definit anterior nu este o suprafaţă în sensul definiţiei 10.1.3., dar dacă în $\forall M \in \mathcal{S}$, $\overrightarrow{grad}F(M) = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right) \neq 0$, atunci $\mathcal{S}$ este o suprafaţă (în izomorfismul $\mathbf{E}_3 \backsim \mathbf{R}^3$ avem bijecţia $M \longleftrightarrow (x,y,z)$).

Definiţia 10.1.5. *O suprafaţă simplă $\mathcal{S}'$ este graficul unei funcţii netede de două variabile, deci*

$$\mathcal{S}' = \left\{(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \mid z = f(x,y) \in \mathbf{R}^3 \backsim \mathbf{E}_3\right\}$$

Ecuaţia

$$z = f(x,y) \in \mathbf{R}^3 \backsim \mathbf{E}_3, \ \ (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \tag{10.1.2}$$

se numeşte ecuaţia explicită a suprafeţei $\mathcal{S}'$.

Un sistem de trei funcţii

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2, \tag{10.1.3}$$

defineşte tot o suprafaţă $\mathcal{S}''$, printr-o reprezentare parametrică.

Definiţia 10.1.6. *Ecuaţia vectorială a unei suprafeţe $\mathcal{S}''$ este dată de*

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

sau

$$\overline{r}(u,v) = x(u,v)\,\overline{i} + y(u,v)\,\overline{j} + z(u,v)\,\overline{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

Observaţia 10.1.1. Nu orice suport de suprafaţă parametrizată este o suprafaţă simplă.

Observaţia 10.1.1'. O suprafaţă se spune că este de clasă $C^{(p)}$ dacă funcţiile ce intervin în definirea ei sunt de clasă $C^{(p)}$.

Observaţia 10.1.2. În ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ se presupune că în $V \subset \mathbf{R}^3$, funcţia F îndeplineşte condiţiile din teorema de existenţă a funcţiilor implicite.

Observaţia 10.1.3. O suprafaţă $\mathcal{S}$ admite o infinitate de reprezentări parametrice, ce se obţin din (10.1.3) printr-o transformare $u = \psi(\xi,\eta), v = \varphi(\xi,\eta)$ cu ψ şi φ regulate în $\Delta \subset \mathbf{R}^2$.

Generarea suprafeţelor.

Din definiţiile date rezultă că suportul unei suprafaţe se obţine (este generat):

1. de un punct $M(x,y,z)$ care se mişcă în spaţiu după o lege care depinde de doi parametri;

2. de o curbă $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$, al cărei drum suport se mişcă după o lege care depinde de un parametru;

3. mai general, de o clasă de drumuri suport ale unor curbe $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$, definită de

$$F_1(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, \ F_2(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, \tag{10.1.4}$$

cu legăturile

$$\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0, ..., \varphi_{p-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = 0,$$

generează, când $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \Delta \subset \mathbf{R}^p$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$, o suprafaţă $\mathcal{S}$.

Curbe situate pe o suprafaţă.

Dacă în ecuaţia (10.1.1) a unei suprafeţe

$$F(x, y, z) = 0, \ (x, y, z) \in V_3 \subset \mathbf{R}^3,$$

introducem o legătură între (x, y, z),

$$\Phi(x, y, z) = 0, \ (x, y, z) \in V_3 \subset \mathbf{R}^3,$$

ansamblul celor două ecuaţii defineşte o curbă pe suprafaţa $\mathcal{S}$ sau altfel spus, având suprafaţa $\mathcal{S}$ cu parametrizarea (D, r) şi curba $\mathcal{C}$ cu parametrizarea (I, α), se zice că $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ dacă $\alpha(I) \subset r(D)$.

a) Suprafeţe cilindrice.

Definiţia 10.1.7. *Se numeşte suprafaţă cilindrică, suprafaţa $\mathcal{S}$ al cărei suport este generat de o dreaptă variabilă* **D**, *care se mişcă paralel cu ea însăşi, mişcare ce depinde de un parametru.*

Dacă **D** este definită de ecuaţiile a două plane

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{10.1.5}$$

unde $A', B', C', D', A, B, C, D$ depind de un parametru λ, dreapta **D** rămânând paralelă cu ea însăşi, eliminând pe λ între cele două ecuaţii obţinem

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

care este ecuaţia cilindrului.

b) Suprafeţe conice.

Definiţia 10.1.8. *Se numeşte suprafaţă conică, suprafaţa $\mathcal{S}$ al cărei suport este generat de o dreaptă variabilă* $\mathbf{D}$ *ce trece printr-un punct fix V, dreaptă ce se mişcă după o lege depinzând de un parametru.*

Dacă punctul V este definit de intersecţia a trei plane

$$\mathcal{P}_1 = 0,\ \mathcal{P}_2 = 0,\ \mathcal{P}_3 = 0,$$

iar condiţia cere ca dreapta $\mathbf{D}$ să se sprijine pe o curbă $\mathcal{C}$ dată de

$$F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0$$

şi condiţia de incidenţă cere ca sistemul

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ \mathcal{P}_1 = \lambda \mathcal{P}_2 \end{cases},\ \begin{cases} F_2(x, y, z) = 0 \\ \mathcal{P}_1 = \mu \mathcal{P}_3 \end{cases},$$

să fie compatibil în x, y, z, eliminând pe (x, y, z) între cele patru ecuaţii obţinem legătura între λ şi μ:

$$F(\lambda, \mu) = 0,$$

iar ecuaţia suprafeţei conice este dată de

$$F(\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1/\mathcal{P}_3) = 0.$$

Observaţia 10.1.4. Dacă vârful V are coordonatele x_0, y_0, z_0, curba $\mathcal{C}$ este definită de ecuaţiile

$$F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0, \tag{10.1.6}$$

dreapta variabilă $\mathbf{D}$ este dată de

$$x - x_0 = \lambda (y - y_0),\ x - x_0 = \mu (z - z_0)\ ; \tag{10.1.7}$$

eliminând pe x, y, z între cele patru ecuaţii, obţinem legătura $F(\lambda, \mu) = 0$, care conduce imediat la ecuaţia suprafeţei conice

$$F\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}, \frac{x - x_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

c) Conoizi cu plan director.

Definiţia 10.1.9. *Suprafaţa al cărei suport este generat de o dreaptă mobilă Δ, paralelă cu un plan fix $\mathcal{P}$ şi care se sprijină pe drumul suport al unei curbe $\mathcal{C}$ şi o dreaptă* $\mathbf{D}$*, se numeşte conoid cu plan director.*

d) Suprafeţe riglate.

Definiţia 10.1.10. *Suprafeţele al căror suport este generat de o dreaptă variabilă care se mişcă după o lege dată, se numesc suprafeţe riglate.*

Suprafeţele cilindrice, suprafeţele conice, conoizii cu plan director sunt suprafeţe riglate.

e) Suprafeţe de rotaţie.

Definiţia 10.1.11. *Suprafaţa al cărei suport este generat de drumul suport al unei curbe $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$ care se roteşte, fără să alunece, în jurul unei drepte fixe $\mathbf{D}$ se numeşte suprafaţă de rotaţie.*

Dreapta $\mathbf{D}$ se numeşte axă de rotaţie, curba $\mathcal{C}$ curbă generatoare, cercul Γ descris de fiecare punct de pe $\mathcal{C}$ se numeşte cerc generator.

Dacă curba $\mathcal{C}$ este definită de relaţiile (10.1.6), axa $\mathbf{D}$ este dată de ecuaţiile

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \tag{10.1.8}$$

dreapta $\mathbf{D}$ fiind normala la planul variabil $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = \lambda,$$

atunci ecuaţia cercului Γ se obţine intersectând sfera variabilă cu planul $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \mu, \\ ax + by + cz = \lambda. \end{cases} \tag{10.1.9}$$

Dacă eliminăm pe λ şi μ între ecuaţiile curbei $\mathcal{C}$ şi ecuaţiile cercului Γ, obţinem o legătură între λ şi μ de tipul $F(\lambda, \mu) = 0$, iar ecuaţia suprafeţei de rotaţie este dată de

$$F\left(ax + by + cz, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right) = 0.$$

10.2 Plan tangent. Normala la o suprafaţă.

Curbe parametrice.

Fie o suprafaţă definită parametric de ecuaţiile (10.1.1) astfel

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \quad (u,v) \in \Delta,$$

sau vectorial

$$\overline{r} = x(u,v)\,\overline{i} + y(u,v)\,\overline{j} + z(u,v)\,\overline{k}, (u,v) \in \Delta.$$

Suprafaţa $\mathcal{S}$ se numeşte regulată în punctul (u_0, v_0) dacă derivatele de ordinul întâi ale funcţiilor x, y, z sunt continue şi, în plus, determinanţii funcţionali

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

nu se anulează simultan în Δ, ceea ce este echivalent cu $\overline{r_u} \times \overline{r_v} \neq \overline{0}$, unde

$$\overline{r_u} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}, \overline{r_v} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}.$$

Vom presupune că la orice punct (x_0, y_0, z_0) îi corespunde (u_0, v_0) şi reciproc; u_0, v_0 se numesc coordonatele curbilinii ale punctului M_0 pe $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.2.1. *Se numeşte curbă parametrică u pe suprafaţa $\mathcal{S}$, curba definită de*

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v_0),\ \ (u, v_0) \in \Delta,$$

deci $v = v_0$.

Definiţia 10.2.2. *Se numeşte curbă parametrică v pe suprafaţa $\mathcal{S}$, curba definită de*

$$\overline{r} = \overline{r}(u_0, v),\ \ (u_0, v) \in \Delta,$$

deci $u = u_0$.

În general, o curbă $\mathcal{C}$ trasată pe o suprafaţă $\mathcal{S}$ este definită de ecuaţiile (10.1.4) astfel

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v),\ \varphi(u, v) = 0,\ \ (u, v) \in \Delta,$$

anume la ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ se adaugă o legătură între u şi v.

Din $\varphi(u, v) = 0$ obţinem în condiţiile teoremei de existenţă a funcţiilor implicite că $v = \psi(u)$, deci ecuaţia curbei $\mathcal{C}$ se scrie

$$\overline{r} = \overline{r}(u, \psi(u)),\ \ u \in I \subset \mathbf{R}.$$

Prin fiecare punct (u_0, v_0) $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ trece câte un drum suport al unei curbe (sau linie) parametrică.

a) Plan tangent la o suprafaţă.

Definiţia 10.2.3. *Se numeşte plan tangent (dacă există) la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ într-un punct M, planul determinat de tangentele la toate drumurile suport ale curbele $\mathcal{C}$ ce trec prin punctul M, situate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ (în continuare acest plan îl vom numi plan tangent la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M).*

Pentru o curbă parametrică u avem $d\overline{r} = \overline{r_u}du$, deci $\overline{r_u}$ este un vector tangent la drumul suport al curbei u. Pentru curba parametrică v avem $d\overline{r} = \overline{r_v}dv$ şi $\overline{r_v}$ este un vector tangent la drumul suport al curbei v.

Teorema 10.2.1. *Într-un punct regulat M_0 al suportului unei suprafeţe $\mathcal{S}$, este admis un plan tangent definit de*

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \lambda\overline{r_u} + \mu\overline{r_v}\ , \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Demonstraţie. Fie $\overline{r} = \overline{r}\left(u, \psi\left(u\right)\right)$o curbă $\mathcal{C}$ trasată pe $\mathcal{S}$, M_0 un punct pe $\mathcal{C}$, deci

$$\overline{r_0} = \overline{r}\left(u_0, \psi\left(u_0\right)\right).$$

Tangenta la curba $\mathcal{C}$ în punctul M_0 este

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \lambda d\overline{r}$$

(a se vedea ecuaţia tangentei la o curbă: $\frac{x-x_0}{x'(t)} = \frac{y-y_0}{y'(t)} = \frac{z-z_0}{z'(t)} = \lambda$), dar în cazul nostru avem

$$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}\psi'\left(u\right)du$$

(deoarece $v = \psi\left(u\right), d\overline{r} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}du$, adică $d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}\psi'\left(u\right)du$) şi ecuaţia tangentei la curbă (arbitrară) $\mathcal{C}$ devine

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \mu\overline{r_u} + \nu\overline{r_v}\ ,$$

unde am pus $\mu = \lambda du$, $\nu = \psi'\left(u_0\right)\lambda du$; prin urmare, tangenta la orice curbă $\mathcal{C}$ situată pe suprafaţă şi care trece prin punctul M_0 se găseşte în planul determinat de $\overline{r_u}$ şi $\overline{r_v}$, dacă $\overline{r_u} \times \overline{r_v} \neq \overline{0}$.

Dacă $\overline{r_u} \times \overline{r_v} = \overline{0}$, acest plan nu este determinat. ■

Observaţia 10.2.1. Ecuaţia planului tangent la suprafaţă se mai obţine scriind că vectorii $\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{r_u}$ şi $\overline{r_v}$ sunt coplanari:

$$\left(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{r_u} \times \overline{r_v}\right) = 0.$$

Observaţia 10.2.2. Ecuaţia carteziană a planului tangent la suprafaţa $\mathcal{S}$ este

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

unde X, Y, Z este un punct curent pe plan şi (x, y, z) punctul de tangenţă.

Observaţia 10.2.3. Dacă suprafaţa este dată prin ecuaţia (10.1.1)

$$z = z\left(x, y\right), \ \ (x, y) \in D,$$

ecuaţia planului tangent la suprafaţă este

$$Z - z = (X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

şi se obţine, punând $x = u, y = v, z = z(u, v)$,

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţia 10.2.4. Dacă suprafaţa este dată implicit de (10.1.1), adică

$$F(x, y, z) = 0, \ \ (x, y, z) \in V \subset \mathbf{R}^3,$$

ecuaţia planului tangent devine

$$(X - x) F'_x + (Y - y) F'_y + (Z - z) F'_z = 0.$$

b) Normala unei suprafeţe.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, M un punct de pe suportul suprafeţei în care $\mathcal{S}$ admite plan tangent.

Definiţia 10.2.4. *Normala la planul tangent în punctul M se numeşte normala la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M (în continuare o vom numi normala la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M).*

Conform acestei definiţii rezultă:

b.1. versorul normalei $\overline{\mathbf{n}}$ la suprafaţa $\mathcal{S}$ este dirijat după $\overline{r_u} \times \overline{r_v}$, deci

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}.$$

b.2. Ecuaţiile normalei N la suprafaţă sunt

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}$$

când suprafaţa este dată prin ecuaţia $F(x, y, z) = 0$;

ecuaţia normalei devine

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1} \ ,$$

când suprafaţa este dată explicit de $z = z(x, y)$, iar

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

b.3. Ecuaţia vectorială a normalei N la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M de vector de poziţie $\overline{r}$ este

$$\overline{R} = \overline{r} + \lambda \overline{r_u} \times \overline{r_v}.$$

b.4. Ecuaţia normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$, dată parametric, este

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}\ .$$

Orientarea suprafeţelor

Am arătat că orientarea unui spaţiu vectorial se face prin orientarea bazelor sale (mulţimea bazelor este împărţită în două clase de echivalenţă în funcţie de semnul determinantului matricei de trecere- orientarea făcându-se prin fixarea uneia dintre ele). Orientarea unui subspaţiu vectorial se face tot prin orientarea bazelor sale, orientare compatibilă cu cea a spaţiului din care provine (se aplică principiul de completare a bazei).

Definiţia 10.1.12. *Suprafaţa $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ se numeşte orientată dacă fiecare spaţiu tangent $T_M\mathcal{S}$ este orientat ($\forall M \in \mathcal{S}$)- ca subspaţiu vectorial euclidian izomorf cu $\mathbf{R}^3$. Aşa cum am precizat anterior, orientarea lui $T_M\mathcal{S}$ se face prin alegerea versorului normal $\overline{\mathbf{n}}(M)$ (astfel ca baza $(\overline{r_u}', \overline{r_v}', \overline{\mathbf{n}})$, să fie pozitiv orientată în $\mathbf{R}^3$, unde $(\overline{r_u}', \overline{r_v}')$ este baza naturală a lui $T_M\mathcal{S}$).*

10.3 Prima formă pătratică a unei suprafeţe.

a) Elementul de arc.

Fie Γ o curbă al cărei drum suport este trasat pe suportul unei suprafeţe $\mathcal{S}$. Elementul de arc al unei curbe $\overline{r} = \overline{r(t)}$, $t \in I \subset \mathbf{R}$, este dat de

$$ds = |d\overline{r}| = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right| dt.$$

Teorema 10.3.1. *Elementul de arc ds al unei curbe Γ trasate pe o suprafaţă $\mathcal{S}$ definită de*

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v)\ , \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

este dat de

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

unde $E = |\overline{r_u}|^2, F = (\overline{r_u}, \overline{r_v}), G = |\overline{r_v}|^2$.

Demonstraţie. O curbă Γ al cărei drum suport este trasat pe suportul unei suprafeţe $\mathcal{S}$ este definită de relaţia

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ u = u(t),\ v = v(t),\ t \in I \subset \mathbf{R},$$

deci

$$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv = \left[\overline{r_u}\frac{du}{dt} + \overline{r_v}\frac{dv}{dt}\right]dt,$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\overline{r}, d\overline{r}) = (\overline{r_u}du + \overline{r_v}dv, \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv) = \\ &= |\overline{r_u}|^2 du^2 + 2(\overline{r_u}, \overline{r_v})dudv + |\overline{r_v}|^2 dv^2, \end{aligned}$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ∎

Observaţia 10.3.1. Pentru curbele parametrice u şi v, elementul de arc devine

$$ds = \sqrt{E}du,\ ds = \sqrt{G}dv.$$

Deoarece drumul suport al curbei este trasat pe suportul unei suprafeţe, u şi v nu sunt variabile independente, deci avem o legătură $v = \varphi(u)$; prin urmare, du şi dv nu sunt independenţi şi

$$dv = \varphi'(u)du.$$

b) Prima formă pătratică.

Definiţia 10.3.1. *Expresia*

$$\Phi_1(M) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

se numeşte prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei $\mathcal{S}$.

Arătăm că aceasta este întotdeauna pozitiv definită. Are loc

$$\begin{aligned} &4F^2 - 4EG = 4(F^2 - EG) = \\ &= 4\left[(\overline{r_u}, \overline{r_v}) - |\overline{r_u}|^2 |\overline{r_v}|^2\right] = \\ &= 4|\overline{r_u}|^2 |\overline{r_v}|^2 \left[\frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v})^2}{|\overline{r_u}|^2 |\overline{r_v}|^2} - 1\right] = 4|\overline{r_u}|^2 |\overline{r_v}|^2 (\cos^2\theta - 1) = \\ &= -4|\overline{r_u}|^2 |\overline{r_v}|^2 \sin^2\theta = -4|\overline{r_u} \times \overline{r_v}| \le 0, \end{aligned}$$

$E \ge 0$, rezultă că $\Phi_1(M)$ este pozitiv definită.

Dacă $\mathcal{S}$ este dată explicit prin $z = z(x,y), (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, atunci $x = u, y = v$, $z = z(x,y)$ şi avem

$$\begin{aligned} &E = 1 + p^2,\ F = pq,\ G = 1 + q^2, \\ &\Phi_1(M) = (1 + p^2)\, du^2 + 2pqdudv + (1 + q^2)\, dv^2. \end{aligned}$$

c) Unghiul a două curbe trasate pe o suprafaţă.

Fie Γşi Γ' două curbe cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$, date de $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$. Pe Γşi Γ' avem

$$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv$$

şi respectiv

$$\delta\overline{r} = \overline{r_u}\delta u + \overline{r_v}\delta v.$$

Este cunoscut că

$$\cos(\Gamma, \Gamma') = \frac{(d\overline{r}, \delta\overline{r})}{|d\overline{r}|\,|\delta\overline{r}|}\ . \tag{10.3.1}$$

Teorema 10.3.2. *Unghiul ϖ a două curbe cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ este dat de*

$$\cos\varpi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}\ .$$

Demonstraţia teoremei rezultă direct din formula (10.3.1).

Observaţia 10.3.2. Unghiul curbelor parametrice u, v este dat de

$$\cos\varpi = \frac{F}{\sqrt{EG}}\ .$$

Observaţia 10.3.3. Sinusul unghiului ϖ este

$$\sin\varpi = \frac{(du\delta v - dv\delta u)\sqrt{EG - F^2}}{|d\overline{r}|\,|\delta\overline{r}|}\ .$$

Observaţia 10.3.4. Curbele parametrice sunt ortogonale, dacă $F = 0$.

d) Elementul de arie al unei suprafeţe.

Fie o suprafaţă definită parametric de (10.1.1)

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

regulată în D şi cu plan tangent. Fie

$$(\Delta) \qquad u_1 < u_2 < ... < u_n, \ v_1 < v_2 < ... < v_m$$

o diviziune a domeniului D. Fiecărui punct de coordonate curbilinii (u_i, v_j) îi corespund două curbe parametrice cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $u = u_i, v = v_j$, astfel încât avem trasată pe suportul suprafeţei o reţea de drumuri suport ale curbelor parametrice care împart suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ în părţile de suport de suprafaţă $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, ..., \mathcal{S}_p$. Aria suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ este prin urmare suma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \ , \ \sigma_k = \text{aria } \mathcal{S}_k, \ k = 1, 2, ..., p.$$

Presupunem că punctele $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_{j+1})$, definesc colţurile suportului suprafeţei $\mathcal{S}_k$ deci σ_k este aria patrulaterului $\mathcal{S}_k$ mixtiliniu, astfel construit. Aria lui $\mathcal{S}_k$ o exprimăm cu numărul

$$\sigma_k^* = (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \left| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right|,$$

adică cu aria paralelogramului de laturi $\overline{r_u}(u_{i+1} - u_i), \overline{r_v}(v_{j+1} - v_j)$ situat în planul tangent. Deoarece

$$\begin{aligned} &\left| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right| = \left| \overline{r_u} \right| \left| \overline{r_v} \right| \sin\theta, \\ &\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \tfrac{F^2}{EG}} = \sqrt{\tfrac{EG - F^2}{EG}} \end{aligned}$$

şi pentru că $\left| \overline{r_u} \right| = \sqrt{E}, \left| \overline{r_v} \right| = \sqrt{G}$, rezultă

$$\sigma_k^* = \sqrt{EG - F^2} \, |_{u_i, v_j} \, (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j),$$

iar aria suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ este exprimată de suma

$$\mathcal{S}^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{EG - F^2} \, |_{u_i, v_j} \, (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

Definiţia 10.3.2. *Se numeşte elementul de arie al suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ (sau elementul de arie al suprafeţei $\mathcal{S}$), forma diferenţială*

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Definiţia 10.3.3. *Aria suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată de integrala dublă*

$$A_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \int \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Observaţia 10.3.5. Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată explicit de $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, atunci $E = 1 + p^2, G = 1 + q^2, F = pq$, deci $EG - F^2 = 1 + q^2 + p^2$ şi $d\sigma = \sqrt{1 + q^2 + p^2}dxdy$.

Observaţia 10.3.6. Dacă suprafaţa este dată implicit prin $F(x, y, z) = 0$, deoarece

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x}{F'_z}; q = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{F'_y}{F'_z},$$

avem

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2}dxdy \ .$$

10.4 A doua formă pătratică a unei suprafeţe.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $\overline{r}$ de clasă $C^{(2)}$, cu element de arie.

Definiţia 10.4.1. *Se numeşte a doua formă pătratică fundamentală a unei suprafeţe orientate $\mathcal{S}$ într-un punct $M(u, v)$ al suportului său, produsul scalar*

$$\Phi_2(M) = \left(\frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, d^2\overline{r}\right).$$

Teorema 10.4.1. **1.** *Dacă ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată vectorial, avem*

$$\Phi_2(M) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \ ,$$

unde

$$L = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{uu}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, \ M = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{uv}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, \ N = \frac{(\overline{r_u}, \overline{r_v} \times \overline{r_{vv}})}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}.$$

2. *Dacă ecuaţia suprafeţei $\mathcal{S}$ este dată parametric de $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, coeficienţii L, M, N sunt daţi de*

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}$$
$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix}$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţia teoremei este imediată din definiţia 10.4.1. În plus avem şi

$$|\overline{r_u} \times \overline{r_v}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Observaţia 10.4.1. Deoarece

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|},$$

unde $\overline{\mathbf{n}}$ este versorul normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$, rezultă că

$$\Phi_2(M) = \left(\overline{\mathbf{n}}, d^2\overline{r}\right).$$

Observaţia 10.4.2. Dacă $\mathcal{S}$ este dată explicit de $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, atunci

$$\Phi_2(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left[r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2\right],$$

unde

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

10.5 Curbura unei curbe trasată pe o suprafaţă.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă orientată (orientare precizată de funcţia-versor normal $\overline{n}$) dată de $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $M \in$suportului lui $\mathcal{S}$ şi $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţă în punctul M. Fie pe suportul lui $\mathcal{S}$ drumul suport al unei curbe Γ care trece prin punctul M şi $\overline{\nu}$ versorul normalei principale a curbei Γ în M. Avem

$$\overline{\nu} = \rho \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}.$$

Dacă θ este unghiul între $\overline{\nu}$ şi $\overline{n}$, atunci

$$\cos\theta = (\overline{n}, \overline{\nu}) = \frac{\rho}{ds^2}\left(\overline{n}, d^2\overline{r}\right),$$

sau

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

În aceste condiţii are loc următorul rezultat.

Teorema 10.5.1. *Curbura unei curbe Γ cu drumul suport trasat pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ este dată de raportul $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ al celor două forme pătratice fundamentale înmulţite cu $\frac{1}{\cos\theta}$, unde θ este unghiul format de normala la suprafaţă cu normala principală la curbă.*

Definiţia 10.5.1. *Se numeşte secţiune normală a drumului suport a curbei Γ pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M, drumul suport al curbei Γ_1 situat pe suportul lui $\mathcal{S}$, având aceeaşi tangentă cu drumul suport al lui Γ în M, cu normala principală în M- normala suportului suprafeţei în punctul M (vom numi în continuare această secţiune ca secţiunea curbei Γ pe $\mathcal{S}$).*

Observaţia 10.5.1. Secţiunea normală a unei curbe Γ situată pe $\mathcal{S}$ este drumul suport al curbei de intersecţie cu suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ a planului determinat de tangenta $\overline{\mathbf{t}}$ la drumul suport al curbei Γ şi normala $\overline{n}$ la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$.

Pentru secţiunea normală $\theta = 0$, deci dacă $\frac{1}{\rho_n}$ este curbura secţiunii normale, avem relaţia

$$\frac{1}{\rho_n} = \left|\frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\right|.$$

Între razele de curbură ale curbelor Γ şi Γ_1, avem relaţia

$$\rho = \rho_n \cos\theta.$$

În aceste condiţii are loc următorul rezultat.

Teorema lui Meusnier. *Raza de curbură ρ a drumului suport a unei curbe Γ trasată pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ este proiecţia pe planul său osculator a razei de curbură ρ_n a secţiunii normale Γ_1.*

Observaţia 10.5.2. Deoarece planul osculator al curbei Γ conţine tangenta şi normala principală, rezultă că secţiunea normală Γ_1 este secţiunea pe $\mathcal{S}$ a planului osculator a curbei Γ.

Observaţia 10.5.3. Toate curbele Γ cu drumurile suport care trec prin M, situate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$, care au acelaşi plan osculator, au aceeaşi rază de curbură ρ.

Observaţia 10.5.4. O altă formulare a teoremei lui Meusnier: centrul de curbură al unei curbe Γ trasată pe suprafaţa $\mathcal{S}$, este proiecţia ortogonală pe planul osculator al curbei Γ a centrului de curbură al secţiunii normale Γ_1.

Observaţia 10.5.5. Curbura $\frac{1}{\rho_n}$ a secţiunii normale se numeşte şi curbură normală.

a) Curbură tangenţială.

Definiţia 10.5.2. *Dacă $\frac{1}{\rho}$ este curbura drumului suport al curbei Γ în punctul M, expresia*

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\sin\theta}{\rho}$$

se numeşte curbură tangenţială sau geodezică a drumului suport a curbei Γ în punctul M (în continuare o vom numi curbură tangenţială sau geodezică a curbei Γ în punctul M).

Observaţia 10.5.6. Dacă $\mathcal{T}$ este planul tangent la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M şi Γ'' este proiecţia curbei Γ pe $\mathcal{T}$ şi ρ_t este raza de curbură a lui Γ', atunci $\rho_t = \rho_{\mathcal{T}}$, deci

$$\frac{1}{\rho_t} = \overline{n}\left(\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right),$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul M.

b) Curburi principale.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă orientată şi M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$, punctul M fiind regulat. Dacă R este raza de curbură a secţiunii normale, avem, în afară de semn,

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2};$$

dacă notăm

$$m = \frac{dv}{du}$$

obţinem

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mm + Nm^2}{E + 2Fm + Gm^2}.$$

Se observă că pe suportul suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ curbura secţiunii normale în punctul M depinde numai de m, deoarece L, M, N, E, F, G sunt constante (depind numai de coordonatele lui M).

Definiţia 10.5.3. *Se numesc curburi principale ale suportului suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M valorile extreme ale lui $\frac{1}{R}$ când m variază (în continuare le vom numi curburi principale ale suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).*

Definiţia 10.5.4. *Inversele curburilor principale se numesc raze de curbură principale.*

Definiţia 10.5.5. *Valorile lui m, care dau curburile principale, se numesc direcţiile principale ale suportului suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M (în continuare le vom numi direcţii principale ale suprafeţei orientate $\mathcal{S}$ în punctul M).*

Teorema 10.5.2. *Direcţiile principale sunt definite de ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie. Valorile de extrem se găsesc anulând derivata întâi a funcţiei $\frac{1}{R}$:

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{(2M+2Nm)\left(E+2Fm+Gm^2\right)}{(E+2Fm+Gm^2)^2} -$$

$$- \frac{(2F+2Gm)\left(L+2Mm+Nm^2\right)}{(E+2Fm+Gm^2)^2} = 0,$$

deci $(M+Nm)(E+2Fm+Gm^2) = (F+Gm)(L+2Mm+Nm^2)$, adică

$$\frac{M+Nm}{F+Gm} = \frac{L+2Mm+Nm^2}{E+2Fm+Gm^2} = \frac{L+Mm}{E+Fm}\ ;$$

ultima egalitate se obţine înmulţind primul raport şi sus şi jos cu m, apoi scăzând din al doilea raport pe primul numitor din numitor şi numărător din numărător. Ecuaţia obţinută

$$\frac{M+Nm}{F+Gm} = \frac{L+Mm}{E+Fm}$$

este cea din enunţ. ■

Observaţia 10.5.7. Ecuaţia direcţiilor principale are numai rădăcini reale. Într-adevăr, ecuaţia se scrie

$$m^2(FN-MG) + m(EN-LG) + EM - FL = 0\ ; \qquad (10.5.1)$$

$$f(0) = EM - FL,\ f\left(-\frac{E}{F}\right) = \frac{EG-F^2}{F^2}(FL-EM),$$

deci

$$f(0)\ f\left(-\frac{E}{F}\right) = -\frac{EG-F^2}{F^2}(FL-EM)^2 < 0,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că ecuaţia (10.5.1) admite întotdeauna o rădăcină reală în intervalul $\left(0, -\frac{E}{F}\right)$.

Observaţia 10.5.8. Direcţiile principale sunt ortogonale. Din ecuaţia lor

$$m_1 + m_2 = -\frac{EN-LG}{FN-MG},\ m_1 m_2 = \frac{EM-FL}{FN-MG}$$

şi din condiţia de ortogonalitate, ecuaţia

$$E + F(m_1+m_2) + Gm_1m_2 = 0$$

este satisfăcută, deoarece

$$E\,(FN - MG) - F\,(EN - LG) + G\,(EM - FL) = 0.$$

Teorema 10.5.3. *Ecuaţia curburilor principale este*

$$\begin{vmatrix} L - \frac{E}{R} & M - \frac{F}{R} \\ M - \frac{F}{R} & N - \frac{G}{R} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţia se obţine eliminând pe m din ecuaţiile

$$\frac{1}{R} = \frac{M + Nm}{F + Gm},\ \frac{1}{R} = \frac{L + Mm}{E + Fm}.$$

c) Linii de curbură pe o suprafaţă.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, un punct $M\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ şi m_1, m_2 direcţiile principale în punctul M pe suportul lui $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.5.6. *Curbele trasate pe suprafaţă, ce trec prin punctul M, soluţii ale ecuaţiei diferenţiale*

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & -\frac{dv}{du} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.5.2}$$

se numesc liniile de curbură ale suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ ce trec prin punctul M (în continuare le vom numi linii de curbură ale suprafeţei $\mathcal{S}$ ce trec prin punctul M).

Observaţia 10.5.9. Ecuaţia (10.5.2) se scrie

$$(FN - MG)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (EN - LG)\,\frac{dv}{du} + EM - FL = 0$$

şi este echivalentă cu două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Condiţia cerută să treacă prin punctul M este o problemă Cauchy.

Observaţia 10.5.10. Soluţiile găsite sunt ortogonale. Ele determină pe $\mathcal{S}$ o reţea de curbe ortogonale numită reţeaua liniilor de curbură.

Curbele parametrice sunt linii de curbură dacă sunt ortogonale, deci $F = 0$ şi dacă ecuaţia (10.5.2) se reduce la $dudv = 0$, deci şi $M = 0$.

d) Curbura totală. Curbura medie.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă, un punct M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ şi $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ curburile principale în punctul M.

Definiţia 10.5.7. *Se numeşte curbura totală a suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M numărul*

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

(în continuare o vom numi curbură totală a suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).

Definiţia 10.5.8. *Se numeşte curbura medie a suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M numărul*

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(în continuare o vom numi curbură medie a suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul M).

Teorema 10.5.4. *Curbura totală şi curbura medie sunt date de*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\left(EG - F^2\right)}.$$

Demonstraţia rezultă din ecuaţia care dă $\frac{1}{R_1}$ şi $\frac{1}{R_2}$.

Definiţia 10.5.9. *Un punct M $\in$suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte eliptic dacă $K > 0$ în M.*

Definiţia 10.5.10. *Un punct $M \in$ suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte hiperbolic dacă $K < 0$ în M.*

Definiţia 10.5.11. *Un punct $M \in$ suportului suprafeţei $\mathcal{S}$ se numeşte parabolic dacă $K = 0$ în M.*

Observaţia 10.5.11. O suprafaţă cu toate punctele suportului său eliptice se numeşte suprafaţă de tip eliptic (sfera este o suprafaţă de tip eliptic).

Observaţia 10.5.12. O suprafaţă cu toate punctele suportului său hiperbolice se numeşte suprafaţă de tip hiperbolic.

Observaţia 10.5.13. O suprafaţă cu curbura totală constantă se numeşte suprafaţă de curbură constantă.

Observaţia 10.5.14. O suprafaţă cu curbura medie nulă $H = 0$ se numeşte suprafaţă minimă.

Suprafeţele minime au curbura totală negativă, deoarece din

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

rezultă

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_2},$$

deci

$$K = -\frac{1}{R^2} < 0.$$

10.6 Linii asimptotice.

a) Linii asimptotice

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă şi M un punct pe suportul lui $\mathcal{S}$.

Definiţia 10.6.1. *Fie Γ o curbă al cărei drum suport trece prin punctul M şi este trasat pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ şi $\overline{\mathbf{t}}$ versorul tangentei la drumul suport al lui Γ în M. Dacă Γ are curbura normală nulă, $\overline{\mathbf{t}}$ defineşte o direcţie asimptotică la suportul lui $\mathcal{S}$ în punctul M.*

Teorema 10.6.1. *Direcţiile asimptotice*

$$\frac{dv}{du}$$

sunt date de ecuaţia

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

Demonstraţie. Avem

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

deci $\frac{1}{\rho_n} = 0$ dacă $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$, sau

$$N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2M\frac{dv}{du} + L = 0,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţia 10.6.1. Prin punctul M trec două direcţii asimptotice distincte dacă $M^2 - LN > 0$, deci M este un punct hiperbolic.

Observaţia 10.6.2. Dacă $M^2 - LN = 0$, direcţiile asimptotice în punctul M sunt confundate. Punctul M este parabolic.

Observaţia 10.6.3. Dacă $M^2 - LN < 0$, direcţiile asimptotice sunt imaginar conjugate (nu sunt reale); punctul M este eliptic.

Definiţia 10.6.2. *Curbele Γ cu drumurile suport trasate pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ care în fiecare punct al lor sunt tangente la una din direcţiile asimptotice ce trec prin acel punct, se numesc liniile asimptotice ale suprafeţei $\mathcal{S}$.*

Teorema 10.6.2. *Determinarea liniilor asimptotice este o problemă Cauchy pentru cele două ecuaţii de ordinul întâi deduse din*

$$L + 2M\frac{dv}{du} + N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0. \tag{10.6.1}$$

Demonstraţie. Din ecuaţia (10.6.1) obţinem

$$\frac{dv}{du} = f_1(u,v) \ , \ \frac{dv}{du} = f_2(u,v) \tag{10.6.2}$$

şi determinarea liniilor asimptotice (dacă există) se reduce la integrarea fiecărei ecuaţii (10.6.2) în parte, cu condiţia de a trece prin punctul $v(u_0) = u_0$. ∎

Observaţia 10.6.4. Pentru o linie asimptotică, planul osculator este plan tangent la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$. Într-adevăr, în acest caz avem

$$\frac{1}{\rho}\cos\theta = 0, \ \cos\theta = 0, \ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \frac{1}{\rho} = 0, \ \rho = \infty,$$

şi drumul suport al curbei este o dreaptă pe suportul lui $\mathcal{S}$; planul său osculator este nedeterminat.

Invers, din

$$\frac{1}{\rho}\cos\theta = 0,$$

rezultă ecuaţia (10.6.1).

b) Linii geodezice.

Fie $\mathcal{S}$ o suprafaţă şi $\overline{\mathbf{n}}$ versorul normalei la suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ într-un punct M.

Definiţia 10.6.3. *O linie Γ cu drumul suport trasat pe suportul suprafeţei $\mathcal{S}$ este o linie geodezică a lui $\mathcal{S}$ dacă în fiecare punct al drumului suport al lui Γ versorul $\overline{\mathbf{n}}$ se găseşte în planul osculator al curbei Γ.*

Teorema 10.6.3. *Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată vectorial prin $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, ecuaţia liniilor geodezice este dată de*

$$\overline{\mathbf{n}}\left(d\overline{r} \times d^2\overline{r}\right) = 0.$$

Demonstraţie. Se ştie că în planul osculator al curbei Γ de ecuaţie $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, cu $\Phi(u,v) = 0$, se găsesc vectorii $d\overline{r}$ şi $d^2\overline{r}$, deci condiţia cerută de liniile geodezice este ca $\overline{\mathbf{n}}, d\overline{r}$ şi $d^2\overline{r}$ să fie în acelaşi plan. ∎

Observaţia 10.6.5. Dacă

$$\overline{r}(u,v) = x(u,v)\,\overline{i} + y(u,v)\,\overline{j} + z(u,v)\,\overline{k}$$

este ecuaţia lui $\mathcal{S}$ şi

$$d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz, \ d^2\overline{r} = \overline{i}d^2x + \overline{j}d^2y + \overline{k}d^2z \ ,$$

iar

$$\mathbf{n} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{|\overline{r_u} \times \overline{r_v}|}, \ \overline{r_u} \times \overline{r_v} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k},$$

ecuaţia liniilor geodezice este o ecuaţie de ordinul doi

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{10.6.3}$$

Observaţia 10.6.6. Planul osculator al lui Γ este determinat de $\overline{\tau}$ şi $\overline{\nu}$ (deoarece conţine şi pe $\overline{n}$ care este perpendicular pe $\overline{\tau}$), rezultă că vectorii $\overline{n}$ şi $\overline{\nu}$ sunt coliniari; deci pe Γ

$$\overline{\nu} = \lambda\overline{n} \text{ sau } \overline{\nu} = \mu\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \ \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \lambda^*\overline{n},$$

adică

$$\frac{d^2x}{A} = \frac{d^2y}{B} = \frac{d^2z}{C} \ , \tag{10.6.4}$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \ , B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \ , \ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Observaţia 10.6.7. Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată prin $F(x,y,z) = 0$, versorul $\overline{n}$ este dat de

$$\overline{n} = \left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \lambda\frac{\partial F}{\partial y}, \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

cu

$$\lambda = \frac{1}{\left(F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

şi pentru că

$$\frac{A}{F_x'} = \frac{B}{F_y'} = \frac{C}{F_z'}$$

rezultă din (10.6.4) că ecuaţia geodezicelor în acest caz se scrie

$$\frac{d^2x}{F_x'} = \frac{d^2y}{F_y'} = \frac{d^2z}{F_z'} \ .$$

Observaţia 10.6.8. Printr-un punct trec o infinitate de linii geodezice. Într-adevăr, ecuaţia (10.6.3) este de ordinul doi, deci integrarea ei introduce două constante arbitrare. Punctul M şi o direcţie prin M determină cele două constante (sau două puncte M_1 şi M_2 pe suportul lui $\mathcal{S}$).

Se poate demonstra că dacă M_1, M_2 sunt două puncte pe suportul lui $\mathcal{S}$, lungimea arcului M_1M_2 situat pe suportul lui $\mathcal{S}$ este minimă pentru arcul de geodezică ce trece prin M_1 şi M_2.

Bibliografie

1. G. Marinescu, Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice, Editura Academiei, Bucureşti,1959.

2. D.K. Fadeev, I. Sominski, Sbornik zadaci po vâsşei algebre, Fizmatgiz, Moskva, 1961.

3. A.G. Kuroş, Lecţii po obşcei algebre, Fizmatgiz, Moskva, 1962.

4. I. Creangă, T. Luchian, Introducere în calculul tensorial, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

5. M. Stoka, Geometrie diferenţială, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

6. G.E. Şilov, Matematiceski analiz, Nauka, Moskva, 1969.

7. P. Stavre, Curs de geometrie diferenţială, Litografia Universităţii din Craiova, 1970.

8. I. Creangă, C. Haimovici, Algebră liniară, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

9. T. Luchian, Algebră abstractă, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

10. R. Miron, Geometrie analitică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

11. C. Năstăsescu şi colectivul, Probleme de structuri algebrice, Editura Academiei, Bucureşti,1988.

12. C. Iacob, Matematică aplicată în mecanică, Editura Academiei, Bucureşti,1989.

13. Gh. Murărescu, Curs de algebră liniară şi geometrie analitică, Reprografia Universităţii din Craiova, 1991.

14. Gh. Murărescu, Curs de Geometrie Diferenţială, Reprografia Universităţii din Craiova, 1998.