I. Ecuaţii Diferenţiale Ordinare

Cuprins

Introducere

Ecuaţiile diferenţiale sunt un model matematic pentru majoritatea fenomenelor din lumea reală.
Strict formal, o ecuaţie diferenţială "ordinară" este o egalitate verificată de o funcţie $x = x(t)$ (care depinde de un singur parametru - variabilă) şi de derivata sa $x'(t)$:

$$(*) \qquad E(t, x(t), x'(t)) = 0 \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

Se poate numi şi ecuaţie diferenţială de ordin 1.
Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin superior, precum şi sistemele liniare de ecuaţii diferenţiale se pot şi ele pune într-o astfel de formă.
Putem considera şi ecuaţii diferenţiale de ordin 2, adică ecuaţii în care apare şi derivata de ordin 2

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

Ecuaţii diferenţiale de ordin 3, adică ecuaţii în care apare şi derivata de ordin 3

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) = 0 \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

sau ecuaţii diferenţiale de orice alt ordin, adică ecuaţii în care apare şi derivata de un ordin oarecare " n ".

Definiţie. Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale o funcţie derivabilă "$x = x(t)$" care verifică ecuaţia (*).
Determinarea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte uneori "integrarea" ecuaţiei.
Denumirea este justificată de modul de rezolvare a celei mai simple ecuaţii diferenţiale $x'(t) = f(t)$,
şi anume se integrează sau se calculează "integrala" (de fapt antiderivata) $\int f(t)dt$
obţinând astfel soluţia $x(t) = \int f(t)dt + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Notaţia $x = x(t)$ înseamnă " x " este funcţie de " t " sau "depinde de parametrul t ".
Notăm derivata funcţiei "$x = x(t)$" cu

$$x'(t) \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{dt} \quad \text{sau} \quad \dot{x}(t)$$

Este preferabil să citim " derivata (funcţiei) lui x în raport cu t " marcând astfel cum gândim,
evitând să citim ad literam " x prim " sau " de x la de t " sau " x punct "
Derivata unei funcţii (unei mărimi fizice) reprezintă (numeric) viteza de variaţie,
cât de repede variază mărimea fizică în timp.
Notaţia $\frac{dx}{dt}$ este justificată de modul de calcul al derivatei unei funcţii (unei mărimi fizice).
Variaţia funcţiei în intervalul de timp $(t - t_0)$ este $(x(t) - x(t_0))$,
iar raportul

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

reprezintă viteza de variaţie în acest interval de timp, sau "viteza medie"
diferenţa $(x(t) - x(t_0))$ se poate nota $\Delta x = x(t) - x(t_0)$ sau $dx = x(t) - x(t_0)$,
respectiv $\Delta t = t - t_0$ sau $dt = t - t_0$
atunci raportul devine

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

viteza "instantanee" la momentul t_0 se obţine ca limită a raportului, adică

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \overset{not}{=} x'(t_0) \overset{not}{=} \frac{dx}{dt}(t_0)$$

Soluţia explicită $x = x(t)$ reprezintă variaţia efectivă a mărimii în timp,
cu alte cuvinte predicţia valorilor mărimii la orice moment de timp t.

Exemplu. Cea mai simplă ecuaţie diferenţială este de forma

$$x'(t) = f(t)$$

Cu alte cuvinte, să se determine funcţiile (derivabile) $x = x(t)$ a căror derivată este $f(t)$.
În analiza matematică studiată în liceu, aceeaşi problemă este formulată astfel

"Să se determine (primitivele) antiderivatele funcţiei $f = f(t)$ " sau

$$\int f(t)dt = \ ? \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = (\ ?\ )' \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \frac{d}{dt}(?)$$

Soluţiile se scriu în forma "tradiţională"

$$x(t) = \int f(t)dt + C \ \ , \ \ C \in \mathbb{R}.$$

unde $\int f(t)dt$ desemnează o (primitivă) antiderivată oarecare.
Constanta $C \in \mathbb{R}$ se poate determina dacă se cunoaşte valoarea funcţiei $x(t_0) = b$ într-un punct oarecare t_0 , numită şi "**condiţie iniţială**"
În acest caz soluţia se poate scrie în forma

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f + b = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + b = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + x(t_0)$$

Denumirea "**condiţie iniţială**" este inspirată din fizică, unde folosind notaţia $x = x(t)$
se spune că mărimea fizică "x" ia valoarea b la momentul iniţial t_0 , atunci când t semnifică timpul.
Aceasta corespunde situaţiei în care ştiind viteza $x'(t) = f(t)$
(viteza de variaţie a mărimii x în raport cu parametrul t)
putem determina explicit variaţia mărimii $x = x(t)$ în funcţie de parametrul t ,
atunci când putem determina explicit antiderivata $\int f(t)dt$,
altfel tot ce obţinem este doar o reprezentare "integrală" a soluţiei (adică sub forma unei integrale).
Condiţia iniţială, reprezintă valoarea mărimii masurată la un moment t_0 ,
Cu alte cuvinte, măsurănd (cunoscând) valoarea mărimii la un moment t_0 ,
putem prezice valorile la orice moment ulterior $t \geq t_0$
Sau, cunoscând valoarea mărimii la un moment "final"
putem determina valorile "evoluţiei" mărimii, la orice moment anterior $t \leq t_0$.

Concret, în balistică, dacă se cunoaşte poziţia iniţială (poziţia de start) şi viteza, se pot prezice poziţiile ulterioare ale unui proiectil sau unde va ajunge, adică poziţia finală.

Sau, invers, dacă se cunoaşte unde a ajuns un proiectil (poziţia finală) şi viteza de impact, atunci se poate determina poziţia de start, sau poziţia iniţială, locul de unde a fost lansat acel proiectil. Sau dorind ca proiectilul să ajung într-un anumit loc, determinăm poziţia iniţială de unde trebuie lansat ca să ajungă în locul dorit.

La fel pentru orice alt sistem fizic, de exemplu un circuit electric, cunoscând valoarea iniţială a intensităţii, putem prezice valorile viitoare ale intensităţii, ceea ce este evident o informaţie deosebit de utilă, sau temperatura unei componente electrice, electronice, este foarte important de cunoscut cum va evolua în viitor pentru a preîntâmpina eventuale accidente sau a cunoaşte necesarul de răcire al componentei respective.

In matematică, pentru ecuaţii diferenţiale, vom numi condiţie initială, indiferent de o eventuală semnificaţie fizică.

Definiţie. *Se numeşte* ***problemă Cauchy*** *, o ecuaţie diferenţială împreună cu o condiţie iniţială:*

$$\begin{cases} E(t, x(t), x'(t)) = 0 & \text{(ED)} \\ x(t_0) = b & \text{(CI)} \end{cases}$$

Se numeşte ***soluţie a problemei Cauchy ,***
o funcţie derivabilă $x = x(t)$ care verifică ecuaţia diferenţială (ED) şi condiţia iniţială (CI) şi este definită în vecinătatea lui t_0.

În cele ce urmează vom căuta doar soluţii "locale", adică definite într-o vecinătate a "condiţiei iniţiale" t_0,
mai precis soluţii definite pe un interval (α, β) care conţine t_0 , $t_0 \in (\alpha, \beta)$
sau un interval simetric $t_0 \in (t_0 - r, t_0 + r)$
Pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale care nu au specificate o condiţie iniţială, vomproceda în md asemănător, căutând doar soluţii pe anumite intervale intervale.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) matematician francez. A iniţiat proiectul formulării şi demonstrării riguroase a teoremelor din calculul diferenţial şi integral, un "pionier" al analizei matematice. Are contribuţii importante în analiza complexă şi lucrări ce acoperă majoritatea problemelor din matematică şi fizică matematică.

Sunt foarte multe noţiuni matematice şir Cauchy, Criteriul lui Cauchy, teorema Cauchy, formula Cauchy, inegalităţi Cauchy, care poartă numele lui Cauchy. Sunt denumiri rămase "istoric" , nu neapărat utile, deoarece a eticheta o teoremă doar cu un nume propriu, nu spune nimic despre conţinutul acelei teoreme, dar au rămas consacrate aşa deocamdată.

Comentariu.

Două probleme fundamentale nu vor fi prezentate în detaliu.

Mai precis

(I) problema "**existenţei**" soluţiilor (pentru ecuaţii diferenţiale) şi

(II) problema "**existenţei şi unicităţii**" soluţiei (pentru problema Cauchy).

Prezentăm pe scurt teoremele care asigură condiţii suficiente ca o ecuaţie diferenţială să aibe soluţii. (teoreme de existenţă)

şi teoremele care asigură condiţii suficiente ca o problemă Cauchy să aibe soluţie unică. (teoreme de existenţă şi unicitate)

O problemă Cauchy este "**corect pusă**" (corect formulată), dacă ecuaţia diferenţială are soluţii care verifică condiţiile iniţiale.

În caz contrar, problema Cauchy este "**incorect pusă**" şi deci nu are soluţii.

Are mare importanţă şi o a treia problemă fundamentală.

(III) Cum se modifică soluţiile problemei Cauchy atunci când se modifică condiţiile iniţiale.

Altfel formulat: "dependenţa soluţiilor de condiţiile iniţiale" , numită şi stabilitatea soluţiilor, nu o prezentăm în detaliu.

Definiţie.

Ecuaţiile diferenţiale scrise în forma

$$(*) \qquad E(t,x(t),x'(t))=0 \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

sunt în mod tradiţional numite în ***forma canonică****, sau aduse la* ***forma canonică****,*

Ecuaţiile diferenţiale scrise în forma

$$x'(t)=G(t,x(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

$$x''(t)=G(t,x(t),x'(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

$$x'''(t)=G(t,x(t),x'(t),x''(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

sunt în mod tradiţional numite în ***forma normală****, sau aduse la* ***forma normală****.*

Aceste denumiri sunt tradiţionale, "istorice", nu tocmai fericit alese, deoarece nu exprimă clar ce anume reprezintă.

Forma canonică, este folosită doar pentru a scrie în modul cât mai general posibil o ecuaţie diferenţială.

De fapt este numită **ecuaţie "implicită"** , deoarece relaţia $E(t,x(t),x'(t))=0$

reprezintă o relaţie care descrie în mod implicit derivata $x'(t)$ în funcţie de t şi de $x(t)$.

Forma normală $x'(t)=G(t,x(t))$ reprezintă de fapt o relaţie care

descrie explicit cum depinde derivata $x'(t)$ în funcţie de t şi de $x(t)$.

Sunt frecvent folosite denumirile de **- soluţie generală - soluţie particulară - soluţie singulară**.

Definiţie. ***Soluţie generală*** *sau* ***soluţia generală*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte mulţimea tuturor soluţiilor obţinute printr-o anumită metodă.*

De exemplu, pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t)=t^2$$

soluţia generală este mulţimea tuturor funcţiilor $x=x(t)$ de forma

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$$

Poate fi oarecum derutant faptul că "soluţia generală" nu este o soluţie (o singură funcţie) ci o mulţime de soluţii (de funcţii) care verifică ecuaţia diferenţială.

Definiţie. ***Soluţie particulară*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte o soluţie oarecare* $x = x(t)$, sau *orice soluţie obţinută din soluţia generală prin "particularizare" , de exemplu pentru o anumită valoare a unei constante de integrare.*

De exemplu, o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = t^2$$

se obţine din soluţia generală dând o anumită valoare constantei de integrare $C \in \mathbb{R}$,
de exemplu pentru $C = 0$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3$$

pentru $C = 4$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4$$

pentru $C = -5\pi$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5\pi$$

Definiţie. ***Soluţie singulară*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte o soluţie care nu se obţine prin particularizare din soluţia generală.*

Această definiţie nu este foarte precisă, dar este simplu exprimată.
De exemplu, pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = t^3 \cdot x^2(t)$$

se pot determina soluţiile nenule ($x(t) \neq 0$ pentru orice t) astfel

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t^3$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int t^3 dt \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{4}xt^4 + C \;,\; C \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C}$$

Obţinem soluţia generală

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Să observăm că ecuaţia diferenţială are şi soluţia nulă, adică funcţia $x(t) = 0$ pentru orice t
deoarece în acest caz $x'(t) = 0$ pentru orice t şi înlocuind în ecuaţia diferenţială, obţinem o identitate

$$\underbrace{x'(t)}_{0} = t^3 \cdot \underbrace{x^2(t)}_{0} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = t \cdot 0 \;\text{ pentru orice }\; t$$

Dar, această soluţie - solutia nulă - nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizare,
deoarece pentru orice $C \in \mathbb{R}$ avem

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C} \neq 0$$

În acest caz numim soluţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t , soluţie singulară a ecuaţiei diferenţiale.
Pot exista ecuaţii diferenţiale care nu au soluţii singulare.
Nu există o metodă generală prin care se determină soluţiile singulare, dacă acestea există.
Pentru fiecare tip de ecuaţie diferenţială se folosesc tehnici specifice.

Interpretare geometrică.

Reprezentarea grafică a unei funcţii de o variabilă, este considerată o interpretare geometrică sau vizualizare geometrică a modului în care variază acea funcţie.

De exemplu graficul evoluţiei temperaturii de-a lungul unei perioade de timp, sau graficul evoluţiei precipitaţiilor sau graficul de evoluţie al schimbului valutar.

Am început cu notaţia $E(t, x(t), x'(t)) = 0$ pentru forma canonică şi $x'(t) = G(t, x(t))$ pentru forma normală, pentru a sugera mai clar legătura cu fenomene fizice care evoluează în timp.

În cele ce urmează schimbăm notaţia, căutând funcţii $y = y(x)$ prin asociere cu puncte din plan de coordonate (x, y).

Să considerăm o ecuaţie diferenţială în formă normală

$$y'(x) = E(x, y(x))$$

în acest caz se caută soluţii $y = y(x)$,

asociem în mod natural un "plan" cu reper cartezian de coordonate xOy cu puncte de coordonate carteziene (x, y)

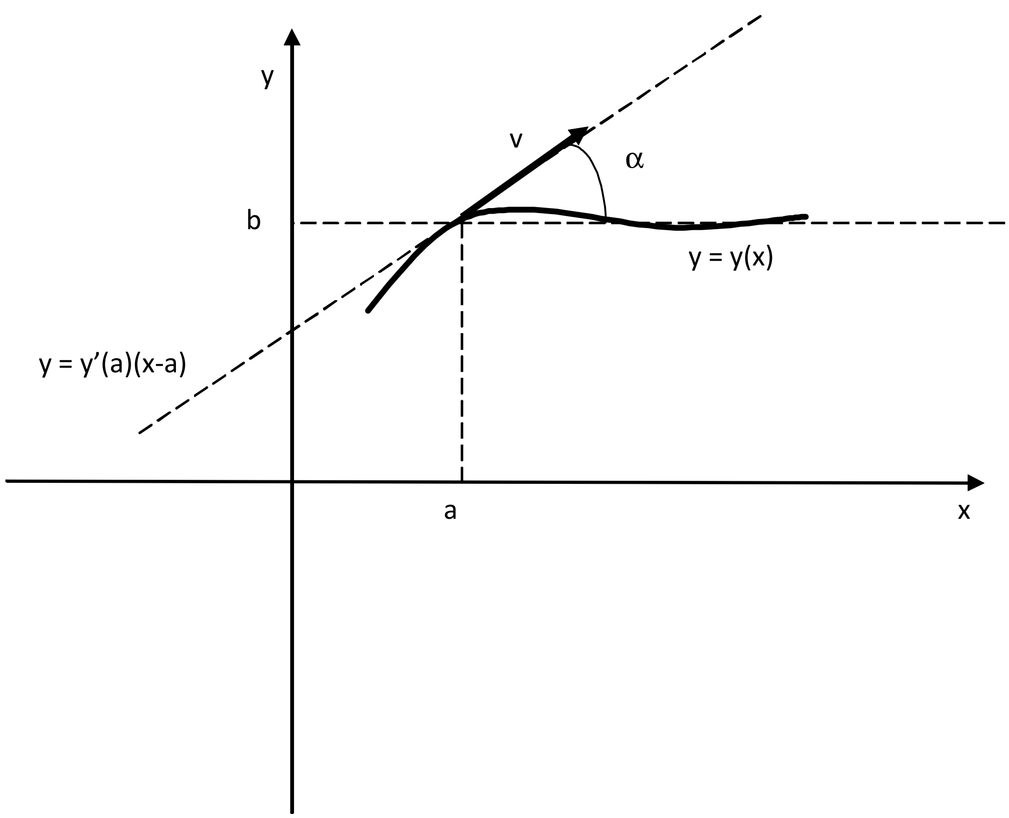
presupunem că pentru orice punct de coordonate (a, b) ecuaţia diferenţială are solutie unică $y = y(x)$

adică verifică ecuatia diferenţială $y'(x) = E(x, y(x))$ şi trece prin punctul (a, b) , adică $y(a) = b$

Tangenta la graficul funcţiei $y = y(x)$ în punctul (a, b) are ecuaţia

$$y - b = y'(a)(x - a)$$

cu alte cuvinte, "panta" dreptei tangente la grafic este $y'(a) = \operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul făcut de dreapta tangenta cu axa Ox



Vectorul director al tangentei la grafic este $\overrightarrow{v} = (a, y'(a)) = (a, E(a, y(a))$ deoarece $y'(a) = E(a, y(a))$

Prin urmare, se poate spune că ecuaţia diferenţială descrie un "câmp vectorial" în plan sau "câmp de direcţii".

O soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y = y(x)$ reprezintă o curbă în plan, cu proprietatea că în fiecare punct al curbei $(a, y(a))$ adică (a, b),

vectorul câmpului $\overrightarrow{v} = (a, y'(a))$ este tangent la curbă.

Aveste curbe se numesc "curbe integrale" deoarece sunt obţinute prin rezolvarea (integrarea) ecuaţiei diferenţiale, sau "linii de câmp" , denumire justificată de exemplul concret al câmpului vitezelor unui lichid care curge,

curbele reprezintă exact traiectoriile moleculelor acelui lichid, sau pentru un câmp magnetic, curbele sunt excat liniile după care se orienteaza particulele magnetizate.

Soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = E(x, y(x)) & \text{(ED)} \\ y(a) = b & \text{(CI)} \end{cases}$$

reprezintă acea curbă care trece prin punctul (a, b) şi este tangentă la vectorii câmpului în fiecare punct al său. De exemplu, ecuaţia diferenţială

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

se "integrează"

$$\int [2x + 2y(x) \cdot y'(x)]\, dx = C \quad \Leftrightarrow \quad \int 2x dx + \int 2y(x) \cdot y'(x) dx = C$$

şi duce la soluţiile (curbele integrale)

$$x^2 + y^2(x) = C \quad , \quad C \geq 0$$

aceste curbe integrale, reprezintă cercuri concentrice, cu centrul în origine O şi de rază $r = \sqrt{C}$
de exemplu

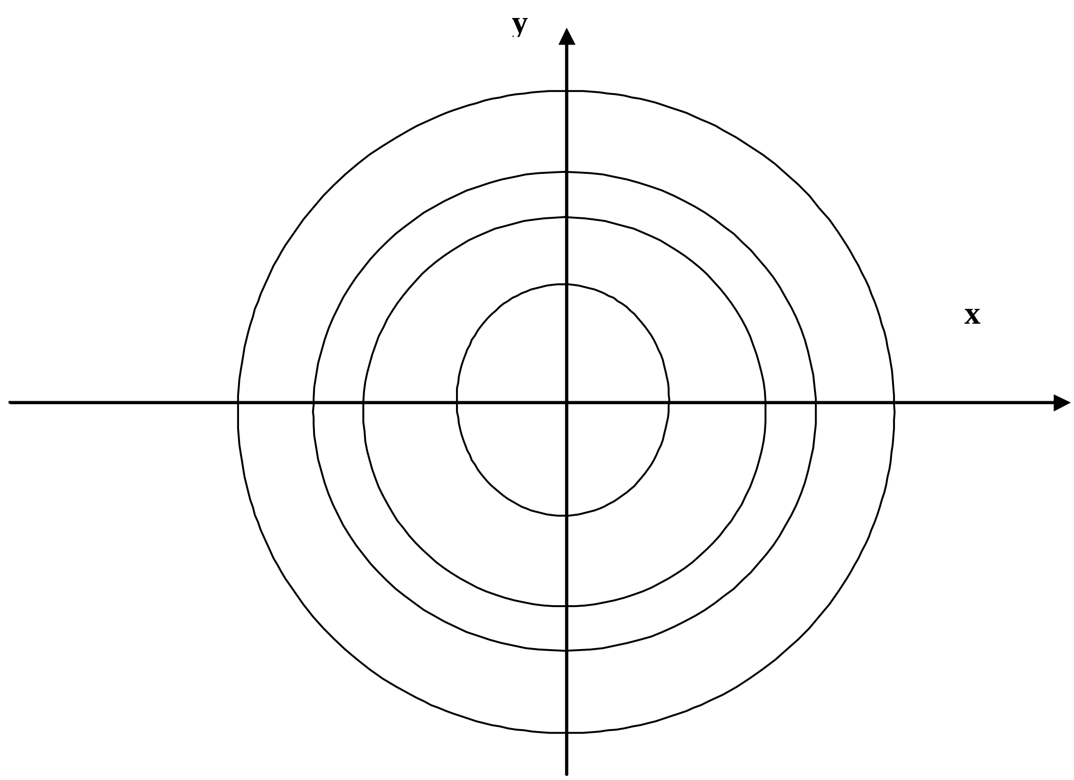
$$\text{pentru } C = 1 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = 1$$

$$\text{pentru } C = 2 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 2 \text{ rază } r = \sqrt{2}$$

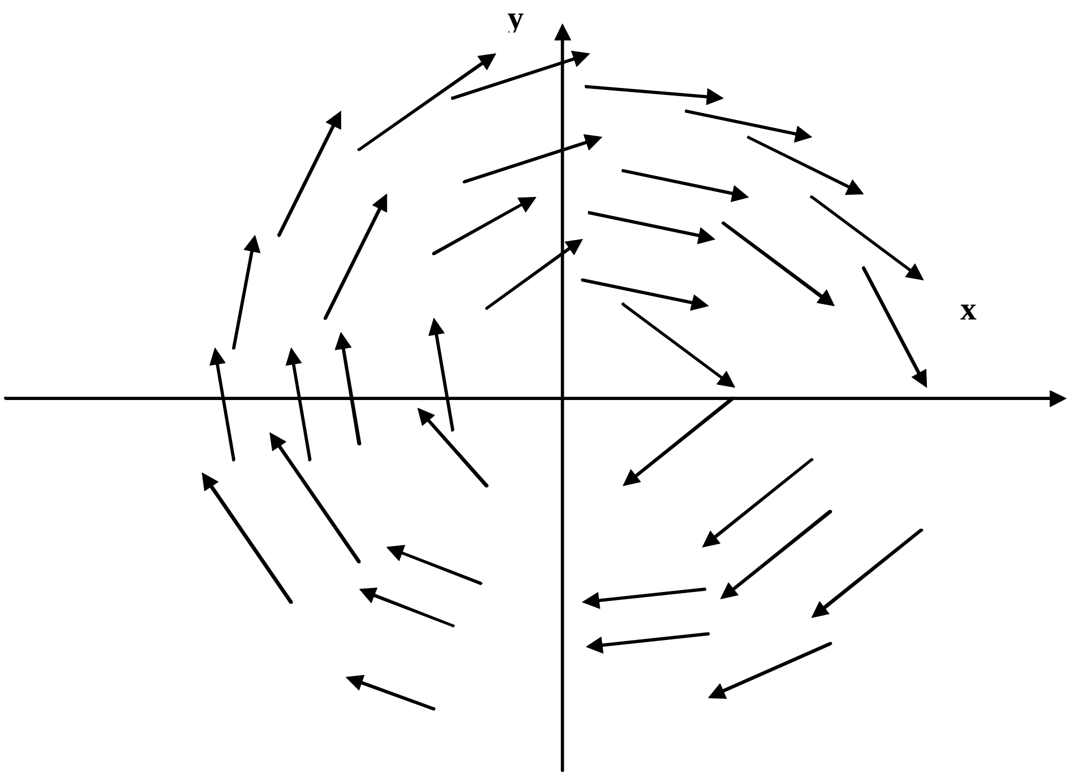
$$\text{pentru } C = 4 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = 2$$

$$\text{pentru } C = 5 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = \sqrt{5}$$

iată cum arată aceste curbe integrale în plan (schiţă aproximativă)



şi iată cum arată "câmpul vectorial" sau "câmpul de direcţii" asociat ecuaţiei diferenţiale (schiţă aproximativă)



Considerând câmpul vectorial asociat ecuaţiei diferenţiale ca un câmp în 3 dimensiuni,
în coordonate (x, y, z) obţinem câmpul vectorial

$$v(x, y, z) = (x, -\frac{x^2}{y}, 0)$$

expresia are sens pentru cadranul I, adică pentru $x, y > 0$
atunci rotorul acestui câmp este

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -\frac{x^2}{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(0)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2}{y}\right)}_{0}\right) - \overrightarrow{j}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(0)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x)}_{0}\right) + \overrightarrow{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y}\right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x)}_{0}\right)$$

$$\operatorname{rot} v = \left(0, 0, -\frac{2x}{y}\right) = \left(-\frac{2x}{y}\right)\overrightarrow{k}$$

ceea ce poate avea ca interpretare fizică - rotaţia în sens invers trigonometric induce înaintarea unui "burghiu drept" în sensul $-\overrightarrow{k}$

Interpretare fizică.
Valoarea (mărimea) $x(t)$ reprezintă starea unui sistem fizic la momentul t ,
Ecuaţia diferenţială $x'(t) = E(t, x(t))$ reprezintă viteza de schimbare a stării x la momentul t
O soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale reprezintă traiectoria sau orbita de evoluţie a sistemului.
Exemple de fenomene a căror evoluţie poate fi descrisă folosind ecuaţii diferenţiale - oscilatorul armonic (pendul elastic) , pendulul gravitaţional, un circuit RLC, un model demografic, dezintegrarea unei substanţe radioactive, propagarea unei epidemii, un model pentru sinteza autocatalitică.

Ecuaţiile dirençiale sunt folosite intens pentru a descrie fenomene din fizică, astronomie (mecanică cerească), geologie (modelarea meteorologică), chimie (viteze de reactie), biologie (boli infecţioase, variaţii genetice), ecologie şi modele de populaţie, economie (evoluţia bursei, variaţia dobanzilor, echilibrul pieţei, variaţia preţurilor).

Din punct de vedere istoric, se consideră că primele ecuaţii diferenţiale au fost numite astfel şi rezolvate de Leibniz şi Newton 1675-1676, evoluţia ulterioară a implicat aproape toţi matematicienii indiferent de domeniul specific din matematică în care au lucrat, aceasta deoarece orice problemă sau noţiune ce implică "variaţie" a unuia sau mai multor parametri, conduce în mod natural la utilizarea ecuaţiilor diferenţiale. Chiar şi pentru variaţii discrete (semnale digitizate) sunt folosite ecuaţii diferenţiale asociind parametri cu variaţie "continuă".

1. Ecuaţii diferenţiale "Elementare"

De fapt este vorba despre ecuaţii diferenţiale care pot fi integrate prin metode elementare, metode relativ simple, care nu necesită o pregatire teoretică specială.

Prezentăm doar metoda prin care se rezolvă ecuaţia diferenţială. Condiţia iniţială este adăugată numai la ecuaţii cu variabile separabile. În toate celelalte cazuri am adăugat o condiţie iniţială numai în exemplele numerice rezolvate.

1.1 Ecuaţii diferenţiale cu "variabile separabile"

Ecuaţiile diferenţiale cu "**variabile separabile**" sunt ecuaţii diferenţiale de forma

$$(1.1.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot B(x(t)) \qquad \text{sau pe scurt} \qquad x' = A(t) \cdot B(x)$$

unde $A : I_1 \to \mathbb{R}$, $B : I_2 \to \mathbb{R}$, sunt funcţii continue pe intervalele I_1, I_2 şi $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I_2$.

Denumirea este justificată de "separarea" într-un produs de două funcţii care depind
una de "t" $A = A(t)$, iar cealaltă de "x" $B = B(x)$,

Scrisă în forma $x' = A(t) \cdot B(x)$ ecuaţia crează impresia că t şi x sunt "variabile" separate în produs de funcţii.

<u>Problema Cauchy</u> corespunzătoare este

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(x) \cdot B(x(t)) \quad , \quad \text{cu condiţia inţială} \quad x(t_0) = b \ , \ t_0 \in I_1$$

Ecuaţia diferenţială (1.1.1) se rescrie

$$\frac{x'(t)}{B(x(t))} = A(t)$$

şi prin integrare obţinem

$$G(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{B(x(t))} dt = \int A(t) dt \ \Rightarrow$$

sau cu schimbarea de variabilă $x(t) = y$ se obţine $x'(t)dt = dy$ şi deci

$$G(y) = \int \frac{1}{B(y)} dy$$

$$G(x(t)) = \int A(t) dt + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

care este o <u>ecuaţie implicită</u> din care se obţine funcţia în mod explicit $x(t) = ...$, atunci când se poate efectiv explicita.

Constanta "de integrare" $C \in \mathbb{R}$ se determină punând condiţia ca soluţia să verifice condiţia inţială $x(t_0) = b$.

$$G(x(t_0)) = b$$

Comentariu.

Condiţia (ipoteza) $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I_2$, asigură existenţa fracţiei $\frac{x'(t)}{B(x(t))}$ şi corectitudinea algoritmului de rezolvare.

Considerând că funcţia $B(x)$ poate lua şi valoarea 0 în diverse puncte, problema se complică mult.

caz (i) dacă $B(x) = 0$ pentru orice $x \in I_2$, atunci din ecuaţia diferenţială rezultă că $x'(t) = 0$ pentru orice $t \in I_1$ şi deci soluţia este o funcţie constantă $x(t) = C$ pentru orice $t \in I_1$

o funcţie constantă descrie un fenomen care nu variază, nu evoluează în timp, deci nu prezintă interes.

caz (ii) există un punct δ în intervalul I_1 pentru care $B(\delta) = 0$ şi $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq \delta$

atunci intervalul I_1se poate scrie $I_1 = (\alpha, \delta) \cup \{\delta\} \cup (\delta, \beta)$ ca o reuniune de două intervale

pe care funcţia $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (\alpha, \delta) \cup (\delta, \beta)$

folosind exact algoritmul descris mai înainte, se determină soluţiile pentru fiecare inetrval în parte (α, δ) respectiv (δ, β)

se pune problema dacă soluţiile astfle gasite au limite laterale egale în punctul $t = \delta$,

deasemenea şi derivatele acestora să aibe limite laterale 0 în punctul $t = \delta$

atunci problema Cauchy admite şi astfel de soluţii.

Dacă însă aceste condiţii nu sunt verificate de soluţiile găsite pentru intervalele (α, δ) respectiv (δ, β)

atunci problema nu admite astfel de soluţii.

Se observă astfel că o ecuaţie diferenţială relativ simplă implică o discuţie extrem de complicată pentru a o rezolvă complet.

În majoritatea cazurilor, ne vom limita la a descrie metode care determină doar soluţii în cazuri simple, fară a analiza în detaliu toate cazurile posbile.

Algoritm de rezolvare.

Pasul I se separă "variabilele" (x şi y sunt considerate "variabile")

$$\frac{x'(t)}{B(x(t))} = A(t)$$

Pasul II se integrează

$$\int \frac{x'(t)}{B(x(t))} dt = \int A(t) dt$$

(dacă se pot calcula primitivele-antiderivatele corespunzătoare)

Pasul III se obţine $x(t) = ...$ din ecuaţia implicită (dacă este posibil) prin "explicitare" , adică rezolvarea ecuaţiei.

Exemplu 1.1a. Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.1.2) \qquad x'(t) = t^3 \cdot x^2(t) \quad , \text{ cu condiţia iniţială } x(0) = 1$$

<u>Soluţie</u>. Procedăm conform algoritmului. Separăm "variabilele"

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t^3$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int t^3 dt \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{4}t^4 + C \;,\; C \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C}$$

Apoi din condiţia inţială obţinem $1 = x(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1$.

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 - 1}$$

Este evident că apare o restricţie asupra domeniului parametrului t ,

$$\frac{1}{4}t^4 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \neq \pm\sqrt{2} \quad , \quad \text{deci} \quad t \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Deoarece condiţia iniţială se referă la valoarea mărimii x pentru $t = 0$, alegem acel interval care conţine 0 , deci $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 - 1} \quad , \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

■

Observaţie 1. Soluţia efectivă a unei probleme Cauchy, poate duce la restricţii aparent neaşteptate dacă se consideră doar ecuaţia diferenţială.

Nu vom insista asupra acestui aspect în continuare, dar este de mare importanţă în orice problemă practică.

Observaţie 2. Este uşor de observat că funcţia $x = x(t) = 0$ pentru orice t , este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.1.2).

Deci problema Cauchy corespunzătoare are condiţia iniţială $x(0) = 0$.

Folosind acestă condiţie iniţială pentru soluţia determinată mai înainte obţinem

$$0 = x(0) = \frac{-1}{\frac{1}{4}0^4 + C} = -\frac{1}{C}$$

ecuaţie ce nu are soluţii oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$

Prin urmare, modul de rezolvare descris nu include şi soluţia "nulă" $x = x(t) = 0$ pentru orice t .

Aparent se "pierde" o posibilă soluţie şi prin urmare ar trebui adăugată.

Totuşi, din punct de vedere fizic, soluţia "nulă" nu prezintă interes. Ea corespunde situaţiei în care mărimea x este constantă, deci nu variază în raport cu parametrul t.

Interesante sunt soluţiile pentru care mărimea x variază în raport cu t .

O asemenea situaţie se întâlneşte la multe ecuaţii diferenţiale sau probleme Cauchy.

De cele mai multe ori, modul de rezolvare prezentat nu ia în considerare soluţia "nulă".

Nu vom mai insista asupra menţionării existenţei unei soluţii "nule", dar trebuie avut în vedere că această posibilitate există.

Familia de soluţii pentru ecuaţia diferenţială se numeşte "**soluţia generală**" a ecuaţiei.

Soluţia (care nu se obţine prin algoritmul "standard") se numeşte soluţie "**singulară**".

Din punct de vedere fizic,

- soluţia generală descrie o familie de soluţii care depind de unul sau mai mulţi parametri
- soluţia singulară descrie o situaţie specială (singulară), dar care este totuşi soluţie a ecuaţiei diferenţiale

Nu vom insista în mod deosebit asupra acestor aspecte.

Doar în cazul ecuaţiilor de tip Clairaut şi de tip Lagrange am insistat să precizăm noţiunile de soluţie generală, soluţie singulară, pentru a justifica aceste denumiri şi a nu le folosi doar în mod pur formal.

Exemplu 1.1b. Viteza de creştere a populaţiei.

Un model pentru creşterea populaţiei (considerând natalitatea şi mortalitatea) este reprezentat de ecuaţia diferenţială

$$P'(t) = kP(t) \quad , \text{ unde } \; P = P(t) \; \text{ reprezintă populaţia la momentul } t \quad , \quad k > 0$$

Populatia este o funcţie cu valori pozitive, deci $P(t) > 0$ pentru orice t.

Soluţie. Procedăm conform algoritmului. Separăm "variabilele"

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int k dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(P(t)) = kt + C \quad \Leftrightarrow \quad P(t) = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt}$$

confom acestui model creşterea populaţiei este "exponenţială" sau ritmul de creştere al populaţiei este exponenţial.

Considerând strict doar ecuaţia diferenţială $P'(t) = kP(t)$, acesta admite şi soluţia nulă $P(t) = 0$ pentru orice t.

Dar aceasta nu este o soluţie ce poate reprezenta populaţia, care este nenulă.

■

1.2 Ecuaţii diferenţiale "omogene"

Ecuaţiile diferenţiale **omogene** sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.2.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A\left(\frac{x}{t}\right) \quad , \quad \text{unde } \; A : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; \text{ este funcţie continuă}, \quad t \neq 0$$

Prin urmare, se caută soluţii
fie pentru $t > 0$ adică soluţii definte pe un interval $(0, \delta)$,
fie pentru $t > 0$ adică soluţii definte pe un interval $(-\delta, 0)$ unde $\delta > 0$ sau $\delta = +\infty$

Rezolvare
Se procedează astfel: facem schimbarea de funcţie

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \;\Leftrightarrow\; x(t) = t \cdot y(t) \;\Rightarrow\; x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$$

înlocuind în ecuaţia (1.2.1) obţinem

$$t \cdot y'(t) + y(t) = A(y(t)) \;\Leftrightarrow\; y'(t) = \frac{A(y(t)) - y(t)}{t}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile şi se rezolvă conform algoritmului prezentat anterior.
Soluţiile obţinute sunt definite pe intervale ce nu conţin punctul $t = 0$, deci fie $(0, \delta)$, fie $(-\delta, 0)$

Algoritm de rezolvare.
Pasul I notăm

$$y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

Pasul II rezolvăm ecuaţia cu variabile separabile obţinută

$$y'(t) = \frac{A(y(t)) - y(t)}{t}$$

integrăm .

$$\int \frac{y'(t)}{A(y(t)) - y(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt$$

şi obţinem o soluţie explicită, dacă este posibilă explicitarea

$$y(t) = ...$$

sau soluţia rămâne în formă implicită.
Apoi obţinem soluţia

$$x(t) = ty(t)$$

Exemplu 1.2 Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.2.2a) \qquad x'(t) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t} \;\;, \text{ cu condiţia iniţială } x(1) = 2$$

Soluţie. Rescriem ecuaţia, pentru a observa că este o ecuaţie omogenă

$$x'(t) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t}$$

notăm

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \;\Leftrightarrow\; x(t) = t \cdot y(t) \;\Rightarrow\; x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$$

înlocuim şi obţinem

$$t \cdot y'(t) + y(t) = y^2(t) + y(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'(t)\frac{1}{y^2(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \qquad \Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{y(t)} = \ln|t| + K \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(t)}{t} = y(t) = \frac{-1}{\ln|t| + K}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei (1.2.2a) este

$$x(t) = \frac{-t}{\ln|t| + K} \ , K \in \mathbb{R}$$

punând şi condiţia iniţială obţinem

$$2 = x(1) = \frac{-1}{\ln|1| + K} \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$$

Dar căutăm soluţii doar într-un interval ce conţine condiţia iniţială,
adică în vecinătatea lui $t = 1$, deci $t > 0$ şi $|t| = t$

$$x(t) = \frac{-t}{\ln t - \frac{1}{2}}$$

în plus apare în mod natural şi condiţia

$$\ln t - \frac{1}{2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln t \neq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t \neq e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Din faptul că $0 < 1 < \sqrt{e}$
soluţia problemei Cauchy este definită pe intervalul $0 < t < \sqrt{e}$

$$x(t) = \frac{-t}{\ln|t| - \frac{1}{2}} \quad , \quad t \in (0, \sqrt{e})$$

■

Observaţie. Deşi algoritmul de rezolvare funcţionează doar pentru $t \neq 0$, totuşi soluţia obţinută are limită în $t = 0$

$$\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{-t}{\ln|t| + K} \right) = \frac{0}{-\infty} = 0$$

deci soluţia se poate prelungi şi în $t = 0$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t}{\ln|t|+K} & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

Ecuaţia se poate rescrie

$$t^2 x'(t) = x^2(t) + t x(t)$$

o condiţie iniţială în $t = 0$ verifică

$$0^2 \cdot x'(0) = x^2(0) + 0 \cdot x(0) \quad \Rightarrow \quad x(0) = 0$$

Problema Cauchy corespunzătoare, cu condiţie iniţială în $t = 0$ este

(1.2.2b) $\qquad t^2 x'(t) = x^2(t) + t x(t)$, cu condiţia iniţială $x(0) = 0$

care are ca soluţie prelungirea definită mai înainte

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t}{\ln|t|+K} & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

Totuşi ecuaţia 1.2.2b are ca soluţie şi funcţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t , soluţie considerată "singulară" .
Prin urmare, algoritmul de rezolvare nu produce şi soluţia singulară. Fapt observat şi în exemplul 1.1b.
■

1.3 Ecuaţii diferenţiale liniare (de ordin 1)

Ecuaţiile diferenţiale **liniare** sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.3.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t)\cdot x(t) + B(t) \quad , \text{ unde } A, B : I \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue}$$

$$\text{sau pe scurt} \qquad x' = A(t)\cdot x + B(t)$$

unde I reprezintă un interval.
Unele prezentări, numesc **ecuaţie afină** (ecuaţia 1.3.1) şi **ecuaţie liniară** (ecuaţia 1.3.1*)

Uneori, rezolvarea într-un caz particular, poate fi utilă.
În acest cazul acestei ecuaţii, pentru $B(t) = 0$ obţinem ecuaţia diferenţială liniară, numită **ecuaţia liniară omogenă** asociată

$$(1.3.1^*) \qquad x'(t) = A(t)\cdot x(t)$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.
Putem să determina precis toate soluţiile acestei ecuaţii diferenţiale, folosind algoritmul deja prezentat.
Deci integrăm ecuaţia

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = A(t)$$

şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \int A(t)dt \Leftrightarrow \ln|x(t)| = \int A(t)dt + K \ , K\in\mathbb{R} \ \Leftrightarrow$$

$$|x(t)| = e^{A(t)dt+K} = e^K\cdot e^{\int A(t)dt} \ , K\in\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \pm e^K\cdot e^{\int A(t)dt} \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = C\cdot e^{\int A(t)dt} \quad , \text{ unde } \pm e^K = C\in\mathbb{R}$$

Ultima relaţie reprezintă **soluţia generală** a ecuatiei diferenţiale liniare omogene.

Observaţie 1. Să remarcăm faptul că în acest caz pentru $C = 0$ obţinem şi soluţia nulă, deşi aparent modul de rezolvare exclude cazul $x(t) = 0$.

Observaţie 2. În plus, mulţimea acestor soluţii formează un spaţiu vectorial,
deoarece pentru orice două soluţii $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verfică ecuaţia liniară omogenă

$$x'(t) = A(t)\cdot x(t) \quad , \quad y'(t) = A(t)\cdot y(t)$$

suma lor $x(t) + y(t)$ şi $\alpha x(t)$ $\alpha\in\mathbb{R}$, sunt de asemenea soluţii ale ecuaţiei liniare omogene

$$x'(t) + y'(t) = A(t)\cdot x(t) + A(t)\cdot y(t) = A(t)(x(t) + y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)' = A(t)(x+y)$$

$$(\alpha x(t))' = \alpha x'(t) = \alpha A(t)x(t) = A(t)(\alpha x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha x)' = A(t)(\alpha x)$$

■

Observaţie 3. Dacă x şi y sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.3.1) (ecuaţia "neomogenă")

$$x'(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t) \quad , \quad y'(t) = A(t)\cdot y(t) + B(t)$$

atunci diferenţa lor verifică ecuaţia diferenţială omogenă asociată

$$[x(t) - y(t)]' = A(t)\cdot[x(t) - y(t)]$$

Observaţie 4.
i) Dacă $z(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare omogene (1.3.1*)
şi $x_0(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare (1.3.1) atunci suma lor

$$x(t) = z(t) + x_0(t)$$

este soluţie a ecuaţiei liniare (1.3.1).
ii) orice soluţie a ecuaţiei liniare (1.3.1) este de această formă $x(t) = z(t) + x_0(t)$

<u>Demonstraţie.</u>

i) Într-adevăr, dacă derivăm obţinem

$$x'(t) = z'(t) + x_0'(t) = A(t) \cdot z(t) + A(t) \cdot x_0(t) + B(t) = A(t) \cdot \left[\underbrace{z(t) + x_0(t)}_{x(t)} \right] + B(t)$$

deci

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t)$$

adică $x(t) = z(t) + x_0(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare.

ii) deoarece diferenţa a două soluţii $x(t) - x_0(t) = z(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare omogene conform Observaţiei 3

■

În concluzie, dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x_0(t)$ a ecuaţiei liniare (soluţie obţinută prin orice mijloace), iar $z(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene,
soluţiile ecuaţiei liniare (1.3.1) sunt exact funcţiile de forma,
sau cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$x(t) = z(t) + x_0(t)$$

Nu este însă uşor de găsit o soluţie particulară $x_0(t)$, nu există o metodă "universală" pentru aşa ceva.

Din acest motiv, pentru rezolvarea ecuaţiilor liniare folosim o altă metodă, numită **metoda variaţiei constantelor**.

Iată etapele algoritmului de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale liniare.

Pasul I. Se rezolvă ecuaţia **liniară omogenă** asociată:

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t)$$

obţinem soluţia generală de forma

$$x(t) = C \cdot e^{\int A(t)dt} \quad , \text{ unde } \; C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosim **metoda variaţiei constantelor**.
Aceasta constă în a căuta soluţia generală a ecuaţiei liniare, de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\int A(t)dt}$$

înlocuind în (1.3.1) obţinem

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t)$$

$$\left(C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} \right)' = A(t) \cdot C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + B(t)$$

$$C'(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} \cdot A(t) = A(t) \cdot C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + B(t) \;\Leftrightarrow$$

$$C'(t) = B(t) \cdot e^{-\int A(t)dt}$$

de unde rezultă prin integrare

$$C(t) = \int \left(B(t) \cdot e^{-\int A(t)dt} \right) dt + K$$

Pentru a nu crea ambiguităţi, putem înlocui (primitiva) antiderivata arbitrară $\int A(t)dt$ cu forma ceva mai precisă $\int\limits_{t_0}^{t} A(u)du$.

Atunci **soluţia generală a ecuaţiei liniare** este

$$x(t) = \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{s} A(u)du} ds + K \right)} \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(u)du} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Algoritm de rezolvare.
Pasul I se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată
Pasul II se aplică metoda variaţiei constantelor pentru a determina soluţia ecuaţiei liniare (neomogene)

Exemplu 1.3 Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.3.2) \qquad x'(t) \cdot \cos t = 1 - x(t) \cdot \sin t \quad \text{, cu condiţia iniţială} \quad x(\pi) = 1$$

Soluţie. Ecuaţia se rescrie (pentru a pune în evidenţă faptul că este o ecuaţie liniară)

$$x'(t) = x(t)\frac{-\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}$$

Pasul I. Rezolvăm ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x'(t) = x(t)\frac{-\sin t}{\cos t} \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -\operatorname{tg} t \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = -\int \operatorname{tg} t dt \Leftrightarrow$$

$$\ln|x(t)| = \ln|\cos t| + K \ , \ K \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ |x(t)| = |\cos t| \cdot e^K \ \Leftrightarrow \ x(t) = \pm e^K \cos t$$

$$x(t) = C \cos t \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Aplicăm metoda variaţiei constantelor:
căutăm soluţia generală a ecuaţiei liniare de forma $x(t) = C(t) \cdot \cos t$
înlocuind în ecuaţie şi derivând obţinem

$$x'(t) = C'(t) \cdot \cos t + C(t) \cdot (-\sin t) = C(t) \cdot \cos t \frac{-\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t} \quad \Leftrightarrow$$

$$C'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \Rightarrow \ C(t) = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t + K$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$x(t) = (\operatorname{tg} t + K) \cos t = \sin t + K \cos t \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Din condiţia iniţială obţinem

$$1 = x(\pi) = \sin \pi + K \cos \pi \Rightarrow K = -1$$

şi deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \sin t - \cos t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Să remarcăm faptul că deşi în paşii intermediari apare restricţia $\cos t \neq 0$, acestă restricţie dispare în forma finală, deci $t \in \mathbb{R}$.
■

1.4 Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Bernoulli,** acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.4.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot x^\alpha \quad \text{, unde } A, B : I \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue, iar } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

$$\text{pe scurt} \qquad x' = A(t) \cdot x + B(t) \cdot x^\alpha$$

Pentru $\alpha = 1$ sau $\alpha = 0$ se obţine o ecuaţie liniară, a cărei rezolvare este deja cunoscută.
Expresia " x^α " reprezintă funcţia putere, deci în mod implicit se presupune că $x(t) > 0$ pentru orice $t \in I$
Dacă însă α este număr întreg, atunci se face o alegere între cazurile
i) $x(t) > 0$ pentru orice $t \in I$ sau
ii) $x(t) < 0$ pentru orice $t \in I$, peste tot I reprezintă un interval.

Denumirea este asociată cu Jacob Bernoulli
Jacob Bernoulli (sau James , Jacques) (1654 – 1705) matematician eleveţian, membru al familiei Bernoulli.

Sunt asociate de asemenea "testul Bernoulli" în teoria probabilităţilor şi "numerele Bernoulli"

Rezolvare

Se face schimbarea de funcţie

$$y(t) = (x(t))^{1-\alpha} \text{ , pe scurt } \quad y = x^{1-\alpha}$$

care duce la o ecuaţie liniară.

Într-adevăr avem

$$x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = \frac{1}{1-\alpha} y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot y'(t)$$

Înlocuind în ecuaţia (1.4.1) obţinem

$$\frac{1}{1-\alpha} y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot y'(t) = A(t) \cdot (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} + B(t) \cdot (y(t))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot y'(t) = A(t) \cdot y(t) + B(t)$$

care este în mod evident o ecuaţie liniară şi se rezolvă conform algoritmului corespunzător.

Algoritm de rezolvare.

Pasul I se face schimbarea de funcţie $y = x^{1-\alpha}$

Pasul II se rezolvă ecuaţia liniară obţinută

Pasul III soluţia este

$$x(t) = [y(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Exemplu 1.4 Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.4.2) \qquad x'(t) = \frac{x(t)}{2t} + \frac{t^2}{2x(t)} \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială } x(1) = 1$$

Soluţie. Putem rescrie ecuaţia

$$x'(t) = \frac{1}{2t} x(t) + \frac{t^2}{2} x(t)^{-1} \quad \text{, deci "}\alpha\text{"} = -1$$

Din condiţia iniţială $x(1) = 1$, deducem că $x(t) > 0$ pentru orice t

Facem schimbarea de funcţie

$$x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-(-1)}} = (y(t))^{1/2} \qquad \Rightarrow \quad x'(t) = \frac{1}{2} (y(t))^{-1/2} \cdot y'(t)$$

şi înlocuind în ecuaţie obţinem

$$x'(t) = \frac{1}{2} (y(t))^{-1/2} \cdot y'(t) = \frac{(y(t))^{1/2}}{2t} + \frac{t^2}{2} \; (y(t))^{-1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^2$$

care este o ecuaţie liniară şi se rezolvă conform algoritmului prezentat.

Pasul I. Rezolvăm ecuaţia liniară omogenă asociată

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} \; \Rightarrow \; \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \; \Leftrightarrow \; \ln|y(t)| = \ln|t| + K \; , \; K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \; |y(t)| = |t| \cdot e^K \; , \; K \in \mathbb{R} \; \Leftrightarrow \; y(t) = \pm e^K t = C \cdot t \; , \; C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Aplicăm metoda variaţiei constantelor.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este de forma $y(t) = C(t) \cdot t$, obţinem

$$y'(t) = C'(t) \cdot t + C(t) = \frac{C(t) \cdot t}{t} + t^2 \Leftrightarrow \; C'(t) = t \Rightarrow C(t) = \frac{t^2}{2} + K \; , \; K \in \mathbb{R}$$

soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + K\right) \cdot t = \frac{t^3}{2} + K \cdot t$$

iar soluţia ecuatiei Bernoulli este

$$x(t) = (y(t))^{1/2} = \sqrt{\frac{t^3}{2} + K \cdot t} \quad , K \in \mathbb{R}$$

Ţinând cont de condiţia iniţială obţinem

$$1 = x(1) = \sqrt{\frac{1}{2} + K} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Deci soluţia problemei Cauchy (1.4.2) este

$$x(t) = \sqrt{\frac{t^3}{2} + \frac{1}{2}t} \quad , \quad t > 0$$

■

1.5 Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Riccati**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.5.1) \qquad x'(t) = A(t) \cdot x^2(t) + B(t) \cdot x(t) + C(t)$$

unde $A, B, C : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe intervalul I .

$$\text{pe scurt} \quad x' = A(t) \cdot x^2 + B(t) \cdot x + C(t)$$

Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754) matematician italian, în prezent cunoscut pentru acest tip de ecuaţii.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x_0(t)$ a ecuaţiei (1.5.1), atunci schimbarea de funcţie

$$y(t) = x(t) - x_0(t)$$

duce la o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$ care se rezolvă după algoritmul corespunzător.

Demonstraţie.

Într-adevăr

$$x(t) = y(t) + x_0(t) \;\text{ şi }\; x'(t) = y'(t) + x_0'(t)$$

înlocuind obţinem

$$y'(t) + x_0'(t) = A(t) \cdot [y(t) + x_0(t)]^2 + B(t) \cdot [y(t) + x_0(t)] + C(t)$$

ţinând cont de faptul că $x_0(t)$ este soluţie, adică

$$x_0'(t) = A(t) \cdot x_0^2(t) + B(t) \cdot x_0(t) + C(t)$$

rezultă ecuaţia de tip Bernoulli

$$y'(t) = A(t) \cdot y^2(t) + 2A(t) \cdot x_0(t) \cdot y(t) + B(t) \cdot y(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$y'(t) = A(t) \cdot y^2(t) + [2A(t) \cdot x_0(t) + B(t)] \cdot y(t)$$

unde se face schimbarea de funcţie pentru $\alpha = 2$,

$$z(t) = y^{1-2}(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{x(t) - x_0(t)}$$

Pe scurt, putem indica direct schimbarea de funcţie

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{z(t)}$$

care duce la o ecuaţie liniară. Derivând rezultă

$$x'(t) = x_0'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

şi înlocuind în ecuaţia (1.5.1) obţinem

$$x'(t) = x_0'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = A(t) \cdot \left(x_0(t) + \frac{1}{z(t)}\right)^2 + B(t) \cdot \left(x_0(t) + \frac{1}{z(t)}\right) + h(t)$$

dar $x_0(t)$ este soluţie, adică

$$x_0'(t) = A(t) \cdot x_0^2(t) + B(t) \cdot x_0(t) + C(t)$$

şi după simplificări obţinem

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = 2A(t) \cdot x_0(t) \cdot \frac{1}{z(t)} + A(t) \cdot \frac{1}{z^2(t)} + B(t) \cdot \frac{1}{z(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -z'(t) = [2A(t) \cdot x_0(t) + B(t)] \cdot z(t) + A(t)$$

care este o ecuaţie liniară ce se rezolvă conform cu algoritmul corespunzător.

Exemplu 1.5. Să se rezolve problema Cauchy

$$x'(t) = tx^2(t) - 2t^2 x(t) + t^3 + 1 \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială} \quad x(0) = 3 \tag{1.5.2}$$

ştiind că o soluţie particulară este $x_0(t) = t$.

Soluţie. Este uşor de verificat faptul că $x_0(t) = t$ este soluţie:

$$1 = (t)' = t \cdot t^2 - 2t^2 \cdot t + t^3 + 1$$

Facem schimbarea de funcţie

$$x(t) = t + \frac{1}{z(t)}$$

şi obţinem

$$x'(t) = 1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

înlocuind în ecuaţie rezultă

$$1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = t\left(t + \frac{1}{z(t)}\right)^2 - 2t^2\left(t + \frac{1}{z(t)}\right) + t^3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = t^3 + 2t^2\frac{1}{z(t)} + \frac{t}{z^2(t)} - 2t^3 - \frac{2t^2}{z(t)} + t^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow z'(t) = -t \;\Leftrightarrow\; z(t) = -\frac{t^2}{2} + K \quad \text{şi} \quad x(t) = t + \frac{2}{-t^2 + 2K} \; , \; K \in \mathbb{R}$$

Din condiţia iniţială

$$3 = x(0) = 0 + \frac{2}{0 + 2K} \quad \Rightarrow \quad 2K = \frac{2}{3}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy (1.5.2) este

$$x(t) = t + \frac{2}{-t^2 + \frac{2}{3}} \quad , \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Din condiţia $-t^2 + \frac{2}{3} \neq 0$ rezultă $t \neq -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$, deci soluţiile pot fi definite pe intervalele

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ sau } \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ sau } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

alegem intervalul de definiţie pentru soluţie $t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, deoarece acesta conţine $t = 0$ din condiţia initială.
Considerând condiţia iniţială $x(3) = 2$, obţinem

$$2 = x(3) = 3 + \frac{2}{3 + 2K} \quad \Rightarrow \quad 2K + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{5}{2}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy (1.5.2) este

$$x(t) = t + \frac{2}{-t^2 - \frac{5}{3}} \quad , \quad t \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

$t \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$, deoarece acesta conţine $t = 3$ din condiţia initială.
În mod asemănător, pentru condiţia iniţială $x(-2) = 1$, obţinem o soluţie definită pe intervalul $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
■

1.6 Ecuaţii diferenţiale de tip Clairaut

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Clairaut**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$x(t) = t \cdot x'(t) + B(x'(t)) \tag{1.6.1}$$

unde $B : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1. Se caută soluţii $x = x(t)$ de clasă C^2.

Alexis Claude de Clairault (sau Clairaut) (1713 – 1765) matematician şi astronom francez.

Procedăm astfel: derivăm ecuaţia (1.6.1) şi obţinem

$$x'(t) = x'(t) + t \cdot x''(t) + B'(x'(t)) \cdot x''(t) \;\Leftrightarrow$$

$$[t + B'(x')] \cdot x''(t) = 0$$

Avem de a face cu funcţii continue, deci dacă nu sunt nule într-un punct t_0 , atunci nu sunt nule pe o întreagă vecinătate a lui t_0,
adică pe un întreg interval, în acest caz I
Prin urmare: ori $[t + B'(x')] \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi atunci $x''(t) = 0$ pentru orice $t \in I$
ori $x''(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi atunci $t + B'(x'(t)) = 0$ pentru orice $t \in I$
i) În primul caz obţinem

$$x''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = a \quad \Rightarrow \quad x(t) = at + b \quad \text{cu} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

înlocuind în ecuaţia (1.6.1) rezultă

$$at + b = t \cdot a + B(a) \quad \Rightarrow \quad b = B(a)$$

Se obţine astfel **soluţia generală** a ecuaţiei Clairaut $x = x(t)$ de forma unei familii de funcţii ce depind de un parametru $a \in \mathbb{R}$

$$x(t) = at + B(a) \quad \text{cu} \quad a \in \mathbb{R}$$

ii) În al doilea caz obţinem

$$t + B'(x'(t)) = 0$$

ţinând seama de ecuaţia iniţială

$$x(t) = t \cdot x'(t) + B(x'(t))$$

se obţine astfel **soluţia singulară** a ecuaţiei Clairaut $x = x(t)$, care se scrie sub formă de ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} t = -B'(p) \\ x(t) = t \cdot p + B(p) \end{cases}$$

unde am notat $p \overset{not}{=} x'(t)$, şi deci p este "parametrul".

Prezentăm în continuare o definiţie "geometrică" pentru ceea ce am numit soluţie singulară, pentru a justifica denumirile folosite (soluţie generală, soluţie singulară) şi a nu le folosi doar în mod formal.

Definiţie. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte "**singulară**",
dacă această soluţie este "**tangentă**" la orice altă soluţie din familia soluţiilor "generale".
Mai precis: $x_S(t)$ este soluţie singulară,
dacă pentru orice $x = x(t)$ soluţie generală,
există un punct "t_0" astfel încât graficele celor două soluţii $x_S(t)$ şi $x(t)$ au aceeaşi dreaptă tangentă

$$x_S(t_0) = x(t_0) \quad \text{şi} \quad x'_S(t_0) = x'(t_0)$$

În cazul ecuaţiei Clairaut aceste relaţii sunt verificate, ceea ce justifică denumirile de soluţie generală, soluţie singulară.
Demonstraţie
Pentru o soluţie "generală" $x(t) = at + B(a)$ cu $a \in \mathbb{R}$, alegem $t_0 = -B'(a)$, deci $p = a$
avem $x'_S(t_0) = p = a = x'(t_0)$, urmează $x_S(t_0) = t_0 \cdot x'_S(t_0) + B(a) = t_0 \cdot a + B(a) = x(t_0)$
Deci soluţia singulară

$$\begin{cases} t = -B'(p) \\ x_S(t) = t \cdot p + B(p) \end{cases}$$

este tangentă la soluţia "generală" $x(t) = at + B(a)$.

Exemplu 1.6. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$(1.6.2) \qquad x(t) = tx'(t) + 3(x')^2$$

Soluţie.
Derivăm şi obţinem

$$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + 6x'(t) \cdot x''(t) \Leftrightarrow$$

$$x''(t) \cdot [t + 6x'(t)] = 0$$

deci ori $x''(t) = 0$ şi rezultă soluţia generală $x(t) = at + b$ cu $b = 3a^2$, $a \in \mathbb{R}$,
ori $[t + 6x'(t)] = 0$ şi soluţia singulară sub formă parametrică (cu p parametru $p = x'(t)$) este

$$\begin{cases} t = -6p \\ x = t \cdot p + 3p^2 \end{cases}$$

■

1.7 Ecuaţii diferenţiale de tip Lagrange

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Lagrange**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.7.1) \qquad x(t) = t \cdot A(x'(t)) + B(x'(t))$$

unde $A, B : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1. Se caută soluţii $x = x(t)$ de clasă C^2.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) matematician şi astronom italian-francez. Contribuţii fundamentale în analiză, mecanică clasică şi mecanică cerească. Lui i se datorează metoda "variaţiei constantelor", metoda "multiplicatorilor lui Lagrange", a aplicat calculul diferenţial în teoria probabilităţilor, a transformat mecanica newtoniană într-o ramură a mecanicii "lagrangiene".

Procedăm astfel: derivăm ecuaţia (1.7.1) şi obţinem o ecuaţie diferenţială de ordin 2 (apare derivata de ordin 2 , x'')

$$x'(t) = A(x') + tA'(x') \cdot x''(t) + B'(x') \cdot x''(t)$$

notăm $x'(t) = p(t)$, deci $x''(t) = p'(t)$ şi obţinem o ecuaţie diferenţială de ordin 1

$$(1.7.1^*) \qquad p(t) = A(p(t)) + tA'(p(t)) \cdot p'(t) + B'(p(t)) \cdot p'(t)$$

Cazul 1) Dacă $p'(t) = 0$ pentru orice t , obţinem **soluţia singulară**

$$p'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; x''(t) = 0 \;\Rightarrow x'(t) = a \quad \Rightarrow\; x(t) = at + b$$

Pe care o înlocuim în ecuaţia (1.7.1) şi obţinem

$$at + b = t \cdot A(a) + B(a) \quad \text{pentru orice } t$$

ceea ce duce la $a = A(a)$ şi $b = B(a)$.
Deci în final obţinem soluţia $x(t) = at + B(a)$, cu $a = A(a)$.
Această soluţie există numai dacă ecuaţia algebrică $a = A(a)$ are soluţii reale.

Cazul 2) Dacă $p'(t) \neq 0$, pentru orice t (într-un anumit interval)
atunci $p'(t)$ are semn constant (deoarece este funcţie continuă) şi deci funcţia $p(t)$ este strict monotonă.
Rezultă că este şi inversabilă cu inversa de asemenea derivabilă.
Notăm această inversă cu $t = t(p)$, atunci

$$t'(p) = \frac{1}{p'(t)} \quad \text{sau} \quad \frac{dt}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dt}}$$

deoarece $t \circ p = id$ (id este funcţia identică $id(t) = t$) , avem $t(p(t)) = t$. Derivând obţinem

$$[t(p(t))]' = (t)' \quad \Leftrightarrow \qquad t'(p) \cdot p'(t) = 1$$

.

Deci practic în ecuaţia (1.7.1*) "schimbăm rolul variabilelor" p şi t (din $p = p(t)$ în $t = t(p)$) şi obţinem

$$p = A(p) + t(p) \cdot A'(p)\frac{1}{t'(p)} + B'(p)\frac{1}{t'(p)} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; t'(p) = \frac{t(p) \cdot A'(p) + B'(p)}{p - A(p)} \;\Leftrightarrow$$

$$t'(p) = t(p)\frac{A'(p)}{p - A(p)} + \frac{B'(p)}{p - A(p)}$$

care este o ecuaţie liniară.
Se rezolvă această ecuaţie şi rezultă $t(p) = ...$ în funcţie de cel puţin un parametru (constanta de integrare)
Soluţia generală a ecuaţiei Lagrange se scrie sub formă parametrică (cu p parametru)

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

În cazul ecuatiei Lagrange denumirile de soluţie generală, soluţie singulară sunt justificate.
Demonstraţie
Pentru o soluţie generală

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

alegem $t_0 = t(a)$, deci $p = a$ şi $a = A(a)$
urmează $x_S(t_0) = at_0 + B(a) = t_0A(a) + B(a) = x(t_0)$ şi $x_s'(t_0) = a = p = x'(t_0)$
Deci soluţia singulară $x_S(t) = at + B(a)$

este "tangentă" la soluţia generală

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

Exemplu 1.7. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$(1.7.2) \qquad x(t) + 2tx'(t) + (x'(t))^2 = 0$$

<u>Soluţie.</u>
Ecuaţia se rescrie

$$x(t) = t[-2x'(t)] - (x'(t))^2$$

derivăm şi obţinem

$$x'(t) = -2x'(t) - t \cdot 2x''(t) - 2x'(t) \cdot x''(t)$$

notăm $x'(t) = p(t)$, $x''(t) = p'(t)$ şi obţinem ecuaţia

$$p = -2p - 2tp' - 2pp' \quad \Leftrightarrow$$

$$(1.7.3) \qquad 3p + 2(t+p) \cdot p' = 0$$

<u>cazul 1)</u>

$$p'(t) = 0$$

rezultă <u>soluţia singulară</u>

$$x(t) = at + b$$

Înlocuind în ecuaţia (1.7.2) obţinem

$$at + b + 2ta + (a)^2 = 0$$

din care rezultă $a = 0$ şi $b = 0$
deci soluţia singulară este soluţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t

<u>cazul 2)</u> $p'(t) \neq 0$. "Schimbăm rolul variabilelor" t şi p , avem

$$p'(t) = \frac{1}{t'(p)}$$

înlocuim şi obţinem ecuaţia

$$3p + 2\frac{t(p)+p}{t'(p)} = 0 \;\Leftrightarrow\; t'(p) = -\frac{2}{3p}t(p) - \frac{2}{3}$$

ecuaţie liniară care se rezolvă în mod ”standard”:
Pasul 1) se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$t'(p) = -\frac{2}{3}t(p)\frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{t'(p)}{t(p)}dp = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{p}dp \quad \Rightarrow \quad \ln|t(p)| = -\frac{2}{3}\ln|p| + K \text{ , } K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad |t(p)| = |p|^{-\frac{2}{3}} \cdot e^K \Rightarrow \; t(p) = \pm e^K |p|^{-\frac{2}{3}} = C\,|p|^{-\frac{2}{3}} \;\text{ , }\; C \in \mathbb{R}$$

Soluţiile sunt funcţiiderivabile, deci continue, să presupunem că $p(t) = p$ are semn constant, de exemplu $p > 0$
Pasul 2) aplicăm metoda variaţiei constantelor, căutând soluţii de forma

$$t(p) = C(p)p^{-\frac{2}{3}}$$

şi înlocuind în ecuaţie obţinem

$$C'(p)p^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}C(p)p^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3p}C(p)p^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow$$

$$C'(p) = -\frac{2}{3}p^{\frac{2}{3}} \Rightarrow C(p) = -\frac{2}{5}p^{\frac{5}{3}} + K \text{ , } K \in \mathbb{R}$$

rezultă

$$t(p) = \left(-\frac{2}{5}p^{\frac{5}{3}} + K\right) p^{-\frac{5}{3}}$$

şi soluţia generală a ecuaţiei Lagrange în formă parametrică este

$$\begin{cases} x = -2tp - p^2 \\ t = -\frac{2}{5}p + Kp^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Constanta " K " se poate determina dacă se cunoaşte (putem măsura) mărimea $t = x(t)$ la un "moment" t_0 , $x(t_0) = b$ (o condiţie "iniţială")
prin rezolvarea sistemului algebric

$$\begin{cases} x(t_0) = b = -2t_0 \cdot p - p^2 \\ t_0 = -\frac{2}{5}p + K \cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Din prima ecuaţie se determină soluţiile reale $p = ...$, care se inlocuiesc în a doua ecuaţie , din care apoi se determină $K = ...$

De exemplu, pentru condiţia iniţială $x(0) = 1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} x(0) = 1 = -2 \cdot 0 \cdot p - p^2 \\ 0 = -\frac{2}{5}p + K \cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 = -p^2 \text{ care nu are soluţii reale}$$

Deci nu orice condiţie iniţială admite soluţii. Este un fapt la care merita reflectat.

Considerăm altă condiţie iniţială $x(0) = -1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} x(0) = -1 = -2 \cdot 0 \cdot p - p^2 \\ 0 = -\frac{2}{5}p + K \cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 = -p^2 \text{ care are soluţiile } p_1 = 1 \text{ , } p_2 = -1$$

Acceptăm doar soluţia pozitivă $p_1 = 1$, deoarece am determinat soluţii pentru cazul $p > 0$.

Înlocuind în a doua ecuaţie obţinem

$$0 = -\frac{2}{5} \cdot 1 + K \cdot 1^{-\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2}{5}$$

şi deci în final obţinem soluţia problemei Cauchy (ecuaţia diferenţială plus condiţia iniţială) , sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = -2tp - p^2 \\ t = -\frac{2}{5}p + \frac{2}{5}p^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

■

1.8 Ecuaţii diferenţiale cu diferenţiale totale

Definiţie. Ecuaţia diferenţială de forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

se numeşte **ecuaţie cu diferenţiale totale** sau **ecuaţie Pfaff**,
unde $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe domeniul D.
O ecuaţie de formă mai stranie, nici în formă canonică, nici în formă normală.
O funcţie $y = y(x)$ este soluţie pentru ecuaţia Pfaff dacă verifică

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \text{ pentru orice } x$$

sau o funcţie $x = x(y)$ care verifică

$$P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y) = 0 \text{ pentru orice } y$$

Ecuaţia Pfaff se numeşte **exactă** dacă există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aşa încât

$$\text{grad}\, F = (P, Q) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

Comentariu.
Ecuaţia Pfaff este doar o scriere formală, care înlocuieşte cele două situaţii

$$\text{i)} \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\text{ii)} \quad P(x,y)\frac{dx}{dy} + Q(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x(y),y) \cdot x'(y) + Q(x(y),y) = 0$$

Observaţie
O ecuaţie Pfaff exactă se rescrie

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

prin urmare $y = y(x)$ este soluţie înseamnă

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[F(x,y(x)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y(x)) = ct$$

la fel $x = x(y)$ este soluţie înseamnă

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(y),y) \cdot x'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(y),y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left[F(x(y),y\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x(y),y) = ct$$

În ambele cazuri constatăm că funcţia F defineşte în mod implicit soluţiile ecuaţiei Pfaff exacte, prin relaţia

$$F(x,y) = ct$$

Aici "ct" desemnează o constantă reală.
Se pune problema
- cum determinăm dacă o ecuaţie Pfaff este exactă sau nu şi
- cum determinăm o funcţie F cu $\operatorname{grad} F = (P,Q)$

Comentariu.
Soluţiile nu apar în formă explicită $y = y(x) = \ldots$ aşa cum se întâmplă la foarte multe ecuaţii diferenţiale, ci doar în forma implicită $F(x,y) = ct$.
Totuşi se consideră că ecuaţia implicită $F(x,y) = ct$ este mai "simplă" decât ecuaţia diferenţială $Pdx + Qdy = 0$

Observaţie.
Dacă ecuaţia Pfaff este exactă, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Demonstraţie.
Ecuaţia este exactă, deci $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P,Q)$, deci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Funcţiile P,Q sunt de clasă C^1 deci funcţia F este de clasă C^2 şi conform teoremei lui Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \overset{\text{T Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

■

Să observăm că problema este echivalentă cu problema pentru câmpuri vectoriale.

Ecuaţia Pfaff exactă , este echivalent cu câmpul vectorial $v = (P, Q)$ este câmp de gradienţi.

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q) = v$$

Sunt folosiţi în mod echivalent termenii
- forma diferenţială $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ este <u>exactă</u>
- ecuaţia Pfaff $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ este <u>exactă</u>
- câmpul vectorial $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ este <u>câmp de gradienţi</u>

pentru a exprima faptul că

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q) = v$$

sau
- forma diferenţială $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ este <u>închisă</u>
- ecuaţia Pfaff $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ verifică $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- câmpul vectorial $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ este un <u>câmp conservativ</u>

pentru a exprima faptul că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Are loc aceeaşi teoremă ca şi pentru câmpuri vectoriale.

Teoremă.
Dacă $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe un domeniu <u>simplu conex</u> D, atunci
i) ecuaţia Pfaff $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ este exactă
$\Leftrightarrow$ ii) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

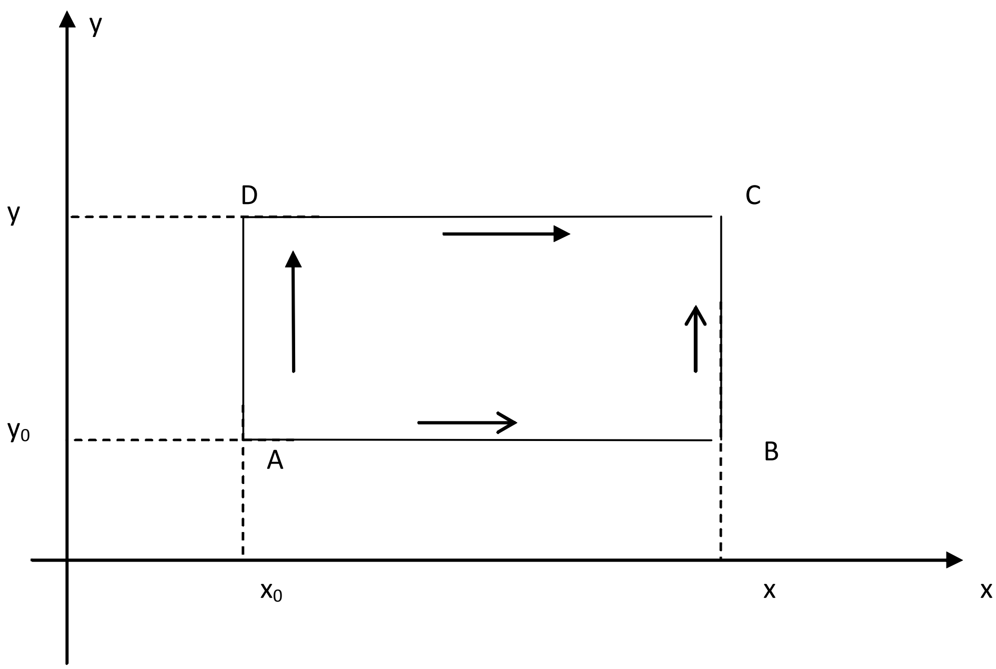
Funcţionează aceleaşi metode de a determina o funcţie F cu $\operatorname{grad} F = (P, Q)$ (un potenţial scalar).

$$F(x, y) = \int_{A}^{(x,y)} P dx + Q dy = \int_{A}^{(x,y)} \overline{v} \cdot d\overline{r}$$

Integrala curbilinie nu depinde de drum ci numai de capetele drumului (deoarece D este simplu conex), deci putem alege orice punct $A = (x_0, y_0) \in D$

Cazuri particulare.

1. <u>D este un dreptunghi</u>



Pentru astfel de domeniu putem alege două tipuri de drumuri, care eventual pot simplifica calcularea integralei curbilinii.

i) segmentul AB reunit cu segmentul BC

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

ii) segmentul AD reunit cu segmentul DC

$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt+\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt$$

<u>Demonstraţie</u>.

i) segmentul AB se parametrizează : $x(t)=t\in[x_0,x]$, $y(t)=y_0$, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$

segmentul BC se parametrizează : $x(t)=x$, $y(t)=t\in[y_0,y]$, $x'(t)=0$, $y'(t)=1$

deci integrala curbilinie devine

$$F(x,y)=\int_{A}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(t,y_0)\underbrace{x'(t)}_{1}+Q(t,y_0)\underbrace{y'(t)}_{0}]dt}^{AB}+\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(x,t)\underbrace{x'(t)}_{0}+Q(x,t)\underbrace{y'(t)}_{1}]dt}^{BC}=$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

ii) segmentul AD se parametrizează : $x(t)=x_0$, $y(t)=t\in[y_0,y]$, $x'(t)=0$, $y'(t)=1$

segmentul DC se parametrizează : $x(t)=t\in[x_0,x]$, $y(t)=y$, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$

deci integrala curbilinie devine

$$F(x,y)=\int_{A}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\overbrace{\int_{y_0}^{y}[P(x_0,t)\underbrace{x'(t)}_{0}+Q(x_0,t)\underbrace{y'(t)}_{1}]dt}^{AD}+\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(t,y)\underbrace{x'(t)}_{1}+Q(t,y)\underbrace{y'(t)}_{0}]dt}^{DC}=$$

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt$$

■

2. <u>D este convex sau stelat</u>, deci există un punct $(x_0, y_0) \in D$ aşa încât
   segmentul ce uneşte (x_0, y_0) cu (x, y) este inclus în domeniul D (pentru orice punct $(x, y) \in D$)
   segmentul ce uneşte (x_0, y_0) cu (x, y) se parametrizează $t \in [0, 1]$
   $x(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $y(t) = y_0 + t(y - y_0)$, $x'(t) = (x - x_0)$, $y'(t) = (y - y_0)$

integrala curbilinie devine

$$F(x,y) = \int_{A}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{0}^{1} [P(x(t),y(t)) \underbrace{x'(t)}_{(x-x_0)} + Q(x(t),y(t)) \underbrace{y'(t)}_{(y-y_0)}]dt$$

Exemplu.
Să se determine soluţiile ecuaţiei diferenţiale

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$$

<u>Soluţie</u>.
În acest caz $P(x, y) = x + y + 1$ şi $Q(x, y) = x - y^2 + 3$
Calculăm

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - y^2 + 3\right) = 1$$

Pe de altă parte funcţiile P şi Q sunt definite pe $\mathbb{R}^3$, un domeniu simplu conex, deci ecuaţia Pfaff este exactă.
Putem integra pe drumuri de tip "dreptunghi" , alege orice punct $(x_0, y_0) = (0, 0)$ şi obţinem

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt$$

$$F(x,y) = \int_{0}^{y} Q(0,t)dt + \int_{0}^{x} P(t,y)dt = \int_{0}^{y} (-t^2 + 3)dt + \int_{0}^{x} (t + y + 1)dt =$$

$$F(x,y) = (-\frac{t^3}{3} + 3t)\Big|_{t=0}^{t=y} + (\frac{t^2}{2} + yt + t)\Big|_{t=0}^{t=x} =$$

$$F(x,y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + \frac{x^2}{2} + yx + x$$

deci soluţiile sunt definite în mod implicit de relaţia

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^3}{3} + x + 3y = C$$

■

Ecuaţii diferenţiale complet integrabile

Ecuaţiile Pfaff care nu verifică $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, nu sunt exacte. În anumite condiţii, pot fi rezolvate la fel ca şi ecuaţiile exacte.

Definiţie. O ecuaţie Pfaff $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ se numeşte **complet integrabilă**, dacă există o funcţie $\mu : D \to \mathbb{R}$, numită **factor integrant**, astfel încât

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

sau astfel încât ecuaţia Pfaff să fie exactă

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Să observăm că dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu conex, atunci ultimele două condiţii sunt echivalente.
Este apoi evident că cele două ecuaţii Pfaff au aceleaşi soluţii.

$$Pdx + Qdy = 0 \text{ şi } \mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

Funcţia $\mu = \mu(x, y)$ este într-adevăr doar un factor, care nu influenţează soluţiile.

Ecuaţia Pfaff $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ fiind exactă, există o funcţie F astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q)$$

Deci ecuaţia Pfaff se poate rescrie

$$\underbrace{\mu(x,y(x)P(x,y(x))}_{\frac{\partial F}{\partial x}} + \underbrace{\mu(x,y(x))Q(x,y(x))}_{\frac{\partial F}{\partial y}}y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[F(x,y(x))] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y(x)) = ct$$

Prin urmare soluţiile ecuaţiei Pfaff $Pdx + Qdy = 0$ sunt definite în mod implicit de $F(x, y) = ct$

Ecuaţiile Pfaff care nu sunt exacte dar sunt complet integrabile se rezolvă astfel.
Nu există o "reţetă" pentru
- a determina dacă o ecuaţie Pfaff admite factor integrant sau
- cum anume arată un asemenea factor integrant.

Tot ce se poate face este să încercăm dacă ecuaţia Pfaff admite ca factor integrant o funcţie de anumită formă: $\mu(x + y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x^2 + y^2)$ ...
Odată determinat un factor integrant, se determină o funcţie $F(x, y)$ (un potenţial scalar) astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q)$$

Exemplu.
Sâ se determine soluţiile ecuaţiei

$$(xy - x^2)dy - y^2dx = 0$$

ştiind că admite un factor integrant

$$\mu(x,y) = \frac{-1}{x^2y}$$

<u>Soluţie</u>.
În acest caz $P(x, y) = -y^2$ şi $Q(x, y) = xy - x^2$
Să verificăm acest factor integrant.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{x^2y}(-y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x^2y}(xy - x^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x^2}$$

Deci într-adevăr ecuaţia Pfaff adimite factorul integrant $\mu(x,y) = \frac{-1}{x^2 y}$
Să determinăm o funcţie $F(x,y)$ cu

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Să remarcăm faptul că $x \neq 0$ şi $y \neq 0$ deci domeniul de definiţie este unul din cele patru cadrane, de exemplu cadranul I $x > 0$, $y > 0$, care este domeniu simplu conex.
Putem alege $(x_0, y_0) = (1,1)$ şi folosind drum de tip "dreptunghi" obţinem

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} \mu(x_0,t)Q(x_0,t)dt + \int_{x_0}^{x} \mu(t,y)P(t,y)dt =$$

$$= \int_{1}^{y} \mu(1,t)Q(1,t)dt + \int_{1}^{x} \mu(t,y)P(t,y)dt = \int_{1}^{y} \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{t}\right) dt + \int_{1}^{x} \left(\frac{y}{t^2}\right) dt =$$

$$= (-t + \ln t)\Big|_{t=1}^{t=y} + \left(-\frac{y}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=x} = -y + \ln y - (-1) - \ln 1 + \left(-\frac{y}{x}\right) - \left(-\frac{y}{1}\right)$$

$$F(x,y) = -y + \ln y + 1 - \frac{y}{x} + y$$

Soluţiile sunt definite în mod implicit de relaţia

$$\ln y - \frac{y}{x} = C$$

■

1.9 Ecuaţii Reductibile la ordinul 1 / Ecuatii implicite

lklklklk

1.10 Exemple Rezolvate

E 1.10.1 Să se determine $x = x(t)$ soluţia problemei Cauchy

$$x'(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t) \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială} \quad x(0) = 3$$

Soluţie.
Ecuaţia diferenţială $x'(t) = tgt \cdot x(t)$, este o ecuaţie cu variabile separabile.
Se rezolvă conform algoritmului corespunzător :

$$x'(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = \operatorname{tg} t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \operatorname{tg} t \; dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

$$\ln|x(t)| = -\ln|\cos t| + K \quad \Leftrightarrow \quad |x(t)| = e^{-\ln|\cos t| + K} = e^{-\ln|\cos t|} \cdot e^K = e^K \cdot \frac{1}{e^{\ln|\cos t|}}$$

$$x(t) = \underbrace{\pm e^K}_{C} \cdot \frac{1}{|\cos t|} = \frac{C}{|\cos t|}$$

Condiţia iniţială este $x(0) = 3 > 0$, deci soluţia problemei Cauchy este definită în vecinătatea lui $t = 0$, funcţia cos este pozitivă în vecinătatea lui $t = 0$, de exemplu pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
prin urmare pe acest interval $|\cos t| = \cos t > 0$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{C}{\cos t} \quad \text{cu} \quad x(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = x(0) = \frac{C}{\cos 0} \quad \Leftrightarrow \quad C = 3$$

În final obţinem soluţia

$$x(t) = \frac{3}{\cos t}$$

■

E 1.10.2 Să se determine funcţiile $x = x(t)$ respectiv , $y = y(x)$, care sunt soluţiile problemelor Cauchy :

$$\frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x \quad , \; x(0) = 2$$

Soluţie.

$$\frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x \quad , \; x(0) = 2 \;\; , \quad x = x(t)$$

Este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Folosim algoritmul corespunzător.

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'(t)}{\cos^2 x(t)} = \sin t$$

Apoi integrăm

$$\int \frac{x'(t)}{\cos^2 x(t)} dt = \int \sin t dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}[x(t)] = \cos t + C \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \mathrm{arctg}\,(\cos t + C)$$

Apoi folosim condiţia iniţială $x(0) = 2$

$$2 = x(0) = \mathrm{arctg}\left(\underbrace{\cos 0}_{1} + C\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \mathrm{arctg}\,(1 + C) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + C = \mathrm{tg}(2) \quad \Leftrightarrow \quad C = \mathrm{tg}(2) - 1$$

şi obţinem soluţia problemei Cauchy

$$x(t) = \mathrm{arctg}\,(\cos t + \mathrm{tg}(2) - 1)$$

■

E 1.10.3 Să se determine soluţiile $x = x(t)$, ale problemelor Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x^3}{t^3} \quad , \qquad x(1) = 2$$

Soluţie.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x^3}{t^3} \quad , \qquad x(1) = 2 \quad , \quad x = x(t)$$

Este o ecuaţie de tip Bernoulli cu "$\alpha = 3$" Folosim algoritmul corespunzător, cu schimbarea de funcţie

$$y(t) = [x(t)]^{1-\alpha} = [x(t)]^{1-3} = [x(t)]^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{[x(t)]^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}}$$

Derivăm şi obţinem

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{y(t)}}\right] = \frac{d}{dt}\left[y(t)^{-1/2}\right] = \frac{-1}{2} y(t)^{-1/2-1} \cdot y'(t)$$

$$x'(t) = \frac{-1}{2} \frac{y'(t)}{y(t)^{3/2}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$\frac{-1}{2}\frac{y'(t)}{y(t)^{3/2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{y(t)}}+\frac{1}{t^3}\left[\frac{1}{\sqrt{y(t)}}\right]^3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-1}{2}y'(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{t}\frac{y(t)^{3/2}}{\sqrt{y(t)}}+\frac{1}{t^3}\frac{1}{y(t)^{3/2}}\cdot y(t)^{3/2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2}y'(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{t}y(t)+\frac{1}{t^3} \;\Leftrightarrow\quad y'(t)=-\frac{1}{t}y(t)-\frac{2}{t^3}$$

Am obţinut o ecuaţie diferenţială liniară.
Pas I Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$y'(t)=-\frac{1}{t}y(t) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{t} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{y'(t)}{y(t)}dt=\int-\frac{1}{t}dt \quad\Leftrightarrow$$

$$\ln|y(t)|=-\ln|t|+K \quad\Leftrightarrow\quad |y(t)|=e^{-\ln|t|+K}=-\left|\frac{1}{t}\right|\cdot e^K$$

$$y(t)=C\cdot\frac{1}{t}$$

Pas II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $y'(t)=-\frac{1}{t}y(t)-\frac{2}{t^3}$
de forma

$$y(t)=C(t)\cdot\frac{1}{t}$$

Calculăm derivata

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left[C(t)\cdot\frac{1}{t}\right]=C'(t)\cdot\frac{1}{t}+C(t)\cdot\left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă şi obţinem

$$C'(t)\cdot\frac{1}{t}+C(t)\cdot\left(\frac{-1}{t^2}\right)=-\frac{1}{t}C(t)\cdot\frac{1}{t}-\frac{2}{t^3} \quad\Leftrightarrow\quad C'(t)\cdot\frac{1}{t}=-\frac{2}{t^3} \quad\Leftrightarrow\quad C'(t)=-\frac{2}{t^2}$$

Integrăm şi obţinem

$$C(t)=\int C'(t)dt=\int\left(-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{2}{t}+K$$

deci

$$y(t)=C(t)\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\left(\frac{2}{t}+K\right)$$

Revenim la schimbarea de funcţie

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{y(t)}}=x(t)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{2}{t}+K\right)}}$$

Folosim condiţia iniţială $x(1)=2$

$$2=x(1)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1}\left(\frac{2}{1}+K\right)}} \quad\Leftrightarrow\quad 4=\frac{1}{\frac{1}{1}\left(\frac{2}{1}+K\right)} \quad\Leftrightarrow\quad 2+K=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad K=-\frac{7}{4}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{2}{t}-\frac{7}{4}\right)}}$$

■

E 1.10.4 Să se determine funcţiile $x=x(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x'(t)=x(t)+t^2 \;\;,\;\; x(1)=2$$

Solutie
Este o ecuatie liniară neomogenă.

Pas 1. Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x'(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int 1 dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x(t)| = t + K$$

$$\Rightarrow \quad |x(t)| = e^{t+K} = e^t \cdot e^K \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \pm e^K \cdot e^t = C \cdot e^t$$

Pas 2. Folosim metode "variatiei constantelor" , căutam soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă, de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^t$$

Derivata este

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[C(t) \cdot e^t\right] = C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot \frac{d}{dt} e^t = C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot e^t$$

Inlocuim în ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = x(t) + t^2$$

obţinem

$$C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot e^t = C(t) \cdot e^t + t^2 \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) \cdot e^t = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) = t^2 \cdot e^{-t}$$

Integrăm pentru a determina funcţia $C(t)$

$$C(t) = \int C'(t) dt = \int t^2 \cdot e^{-t} dt \overset{\text{prin\_parti}}{=} t^2 \cdot e^t - \int 2t \cdot e^t dt \overset{\text{prin\_parti}}{=}$$

$$= t^2 e^t - 2\left[t \cdot e^t - \int 1 \cdot e^t dt\right] = t^2 e^t - 2te^t + e^t + K$$

Deci soluţiile sunt de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^t = \left[t^2 e^t - 2te^t + e^t + K\right] e^t$$

Apoi folosim condiţia iniţială

$$2 = x(1) = \left[1^2 e^1 - 2 \cdot 1 \cdot e^1 + e^1 + K\right] e^1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = Ke^1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2}{e}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \left[t^2 e^t - 2te^t + e^t + \frac{2}{e}\right] e^t = t^2 e^{2t} - 2te^{2t} + e^{2t} + 2$$

■

E 1.10.5 Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = y^2(x) \cdot \sin x + y(x) \cdot \cos x \qquad y(0) = 2 \qquad , \quad y = y(x)$$

Soluţie.
Avem o ecuaţie de tip Bernoulli, cu "$\alpha = 2$". Deci facem schimbarea de funcţie

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha} = [y(x)]^{1-2} = [y(x)]^{-1} = \frac{1}{y(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z(x)}\right) = -\frac{z'(x)}{[z(x)]^2}$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$-\frac{z'(x)}{\left[z(x)\right]^2} = \left[\frac{1}{z(x)}\right]^2 \cdot \sin x + \frac{1}{z(x)} \cdot \cos x$$

$$-z'(x) = \sin x + z(x) \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$$

Am obţinut o ecuaţie liniară neomogenă.
Pas I Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$z'(x) = -z(x) \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z(x)} = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \int -\cos x dx$$

integrăm

$$\ln|z(x)| = -\sin x + K \quad \Leftrightarrow \quad |z(x)| = e^{-\sin x + K} = e^{-\sin x} \cdot e^K \quad \Leftrightarrow \quad z(x) = \pm e^K \cdot e^{-\sin x}$$

obţinem soluţia ecuaţiei liniare omogene

$$z(x) = C \cdot e^{-\sin z}$$

Pas II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$
de forma

$$z(x) = C(x) \cdot e^{-\sin z}$$

Calculăm derivata

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\left(C(x) \cdot e^{-\sin z}\right) = C'(x) \cdot e^{-\sin x} + C(x) \cdot e^{-\sin x}(-\cos x)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$ şi obţinem

$$C'(x) \cdot e^{-\sin x} + C(x) \cdot e^{-\sin x}(-\cos x) = -C \cdot e^{-\sin z} \cdot \cos x - \sin x$$

$$C'(x) \cdot e^{-\sin x} = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = -\sin x \cdot e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int C'(x) dx = -\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$

Soluţia ecuaţiei liniare neomogene este

$$z(x) = e^{-\sin x}\left(-\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx\right)$$

Revenind la schimbarea de funcţie obţinem soluţia ecuaţiei de tip Bernoulli

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx\right)^{-1}$$

sau folosind forma de integrală definită pentru antiderivată

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int_0^x \sin t \cdot e^{\sin t} dt + K\right)^{-1}$$

Folosim condiţia iniţială $y(0) = 2$

$$2 = y(0) = \frac{1}{z(0)} = e^{\sin 0}\left(-\int_0^0 \sin t \cdot e^{\sin t} dt + K\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{1}{K} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{2}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int_0^x \sin t \cdot e^{\sin t} dt + \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

şi rămâne în acestă formă integrală, deoarece nu se poate calcula antiderivata.
■

E 1.10.6 Să se arate că $y(x) = x$ este soluţie pentru ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = xy^2(x) - x^3 + 1 \quad , \quad y = y(x)$$

apoi să se rezolve această ecuaţie diferenţială.

Soluţie.
Calculăm derivata

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

înlocuim în ecuaţie

$$1 = x \cdot (x)^2 - x^3 + 1$$

Deci $y(x) = x$ este soluţie (particulară) pentru ecuaţia diferenţială, care este o ecuaţie diferenţială de tip Riccati.
Aplicăm algoritmul corespunzător.
Facem schimbarea de funcţie, unde soluţia particulară este $y_0(x) = x$

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z(x)}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) = 1 - \frac{z'(x)}{[z(x)]^2}$$

Înlocuind în ecuaţia Riccati obţinem

$$1 - \frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = x \cdot \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 - x^3 + 1$$

$$-\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = x \cdot \left(x^2 + 2x\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{[z(x)]^2}\right) - x^3$$

$$-\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = 2x\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{[z(x)]^2} \quad \Leftrightarrow \quad z'(x) = -2xz(x) - 1$$

Am obţinut o ecuaţie liniară care se rezolvă conform algoritmului standard.
Pas I Mai întâi ecuaţia omogenă

$$z'(x) = -2xz(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z(x)} = -2x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z'(x)}{z(x)}dx = \int -2xdx$$

$$\ln|z(x)| = -x^2 + K \quad \Rightarrow \quad |z(x)| = e^{-x^2+K} = e^{-x^2} \cdot e^K$$

$$z(x) = C \cdot e^{-x^2}$$

Pas II II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -2x \cdot z(x) - 1$
de forma

$$z(x) = C(x) \cdot e^{-x^2}$$

Calculăm derivata

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\left(C(x) \cdot e^{-x^2}\right) = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -2x \cdot z(x) - 1$ şi obţinem

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) = -2xC(x) \cdot e^{-x^2} - 1$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = -e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int C'(x)dx = -\int e^{x^2}dx$$

Soluţia ecuaţiei liniare neomogene este

$$z(x) = e^{-x^2}\left(-\int e^{x^2}dx\right)$$

Revenind la schimbarea de funcţie onţinem soluţia ecuaţiei Riccati

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z(x)} = x + e^{x^2}\left(-\int e^{x^2}dx\right)^{-1}$$

■

E 1.10.7 Să se determine soluţiile ecuaţiilor diferenţiale

$$y(x) = xy'(x) + \frac{5}{y'(x)} \quad , \quad y = y(x)$$

Soluţie.
Este o ecuaţie de tip Clairaut. Folosim algoritmul corespunzător.
Derivăm ecuaţia

$$y'(x) = y'(x) + x \cdot y''(x) - \frac{5}{[y'(x)]^2}y''(x) \quad \Rightarrow \quad 0 = x \cdot y''(x) - \frac{5}{[y'(x)]^2}y''(x)$$

$$y''(x)\left[x - \frac{5}{[y'(x)]^2}\right] = 0$$

i) pentru $y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = a \Rightarrow y(x) = ax + b$ obţinem soluţia generală a ecuaţiei Clairaut,
Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$\underbrace{y(x)}_{ax+b} = x\underbrace{y'(x)}_{a} + \frac{5}{y'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = ax + \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{a}$$

Deci soluţia generală este

$$y(x) = ax + \frac{5}{a} \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$$

ii) pentru

$$x - \frac{5}{[y'(x)]^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{[y'(x)]^2}$$

obţinem soluţia singulară sub formă parametrică , $p \overset{not}{=} y'(x)$

$$\begin{cases} y = xp + \frac{5}{p^2} \\ x = \frac{5}{p^2} \end{cases}$$

■

2 Teoreme de existenţă şi unicitate, Teoreme de Stabilitate

lkjlkjlkj

3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Ecuaţiile diferenţiale de ordin superior sunt ecuaţii în care apar şi derivate de ordin mai mare ca 1. Ordinul unei astfel de ecuaţii este cel mai mare ordin de derivată care apare în expresia ecuaţiei. În forma cea mai generală sau canonică (sau implicită)

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0$$

unde $x^{(n)}(t)$ reprezintă derivata de ordin " n " a funcţiei $x = x(t)$
Ecuaţiile de ordin 2 sunt cele mai des folosite în aplicaţii, deoarece pot descrie cu destulă acurateţe majoritatea fenomenelor reale.

Funcţia $x = x(t)$ reprezintă evoluţia mărimii "x" , derivata $x'(t)$ reprezintă viteza de evoluţie, iar derivata a 2a reprezintă acceleraţia.

În forma normală (sau explicită) ecuaţiile de ordin 2 se scriu

$$x''(t) = E(t, x(t), x'(t))$$

relaţie ce descrie cum variază acceleraţia în funcţie de $t, x(t)$ şi $x'(t)$

De exemplu pentru oscilatorul armonic (pendul elastic) avem ecuaţia (de ordin 2)

$$x''(t) = -k \cdot x(t)$$

unde $k > 0$ este o constantă de elasticitate, specifică materialului din care este confecţionat pendulul elastic.

În cele ce urmează prezentăm metode de rezolvare a unor ecuaţii diferenţiale în care derivata de ordin n se scrie ca o combinaţie liniară a derivatelor sale de ordin mai mic.

Pentru a nu creea obişnuinta cu un singur mod de notaţie, în această secţiune vom folosi notaţia

$$y = y(x) \quad , \quad y'(x) \quad , y''(x) \quad , \quad ... \quad , y^{(n)}(x)$$

Definiţie. O ecuaţie diferenţială de forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_2(x)y^{''} + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (3.1.1)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** n, ($a_n \neq 0$), unde "**coeficienţii**" $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ sunt funcţii de clasă C^1, iar funcţia f este continuă (cel puţin).

O **soluţie** este o funcţie $y = y(x)$ de clasă C^n care (împreună cu derivatele sale $y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$) verifică ecuaţia (3.1.1).

Definiţie. O funcţie $y = y(x)$ se numeşte
- d**e clasă** C^1 dacă funcţia este derivabilă şi are derivata continuă,
- **de clasă** C^2 dacă este de două ori derivabilă şi derivata de ordin 2 este continuă,
- **de clasă** C^n dacă este de n-ori derivabilă şi derivata de ordin n este continuă

(toate derivatele de ordin mai mic ale funcţiei sunt şi acestea continue deoarece sunt funcţii derivabile).

Ne limităm la a descrie algoritmul de rezolvare a **ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi** (funcţiile $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ sunt constante). Prezentăm doar motivaţiile cele mai simple care justifică acest algoritm.

Considerăm deci ecuaţii de forma

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (3.1.2)$$

unde $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ şi coeficientul $a_n \neq 0$.

Mai întâi considerăm ecuaţiile "**omogene**" , adică cele pentru care funcţia f este nulă

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (3.1.3)$$

3.1 Exemple ...

Pentru a înţelege mai bine situaţia să considerăm câteva cazuri particulare mai simple, în care se pot observa mai uşor anumite fapte.

Iată un exemplu din mecanică: oscilatorul armonic are ecuaţia de mişcare $\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$, $k > 0$,
unde $x = x(t)$ reprezintă elongaţia faţă de poziţia de repaus, $\dot{x}(t)$ reprezintă viteza, iar $\ddot{x}(t)$ acceleraţia, t timpul.

Exemple.

Prezentăm rezolvarea a trei exemple de ecuaţii diferenţiale de ordin 2.

Ex 1 $\quad y''(x) - 4y(x) = 0 \qquad$ Ex 2 $\quad y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \qquad$ Ex 3 $\quad y''(x) + 4y(x) = 0$

Soluţii.

Să observăm mai întâi că mulţimea soluţiilor acestor ecuaţii diferenţiale este în fiecare din cazuri un spaţiu vectorial.

i) Funcţia nulă $y(x) = 0$ pentru orice x, este o soluţie, deoarece $y'(x) = 0$, $y''(x) = 0$ şi este evident că acestea verifică ecuaţiile diferenţiale Ex 1, Ex 2, Ex 3.

Soluţia nulă, nu este foarte interesantă din puncte de vedere fizic, deoarece corespunde situaţiei în care funcţia y nu variază.

Totuşi este o soluţie importantă. Este elementul neutru faţă de adunarea funcţiilor.

ii) Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 1, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) - 4y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) - 4y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' - 4(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' - 4y_1 - 4y_2 = \underbrace{y_1''(x) - 4y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) - 4y_2(x)}_{0} = 0$$

La fel şi pentru ecuatiile diferenţiale Ex 2 şi Ex 3

- Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 2, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' - 6(y_1 + y_2)' + 9(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' - 6(y_1' + y_2') + 9(y_1 + y_2) =$$

$$= \underbrace{y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x)}_{0} = 0$$

- Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 3, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) + 4y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + 4(y_1' + y_2') = \underbrace{y_1''(x) + 4y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) + 4y_2(x)}_{0} = 0$$

iii) În fne, dacă $y = y(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale Ex 1, atunci şi $\alpha y(x)$ este soluţie, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, deoarece

$$(\alpha y)''(x) - 4(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) - 4\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) - 4y(x)}_{0}\right] = 0$$

şi exact la fel şi pentru ecuaţiile din Ex 2 şi Ex 3

$$(\alpha y)''(x) - 6(\alpha y)'(x) + 9(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) - 6\alpha y'(x) + 9\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x)}_{0}\right] = 0$$

$$(\alpha y)''(x) + 4(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) + 4\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) + 4y(x)}_{0}\right] = 0$$

Se arată că aceste spaţii vectoriale au dimensiune 2 (exact cât este ordinul acestor ecuaţii diferenţiale)

Deci există baze ale acestor spaţii vectoriale, cu câte două elemente (2 funcţii liniar independente şi care sunt soluţii).

Prin urmare este suficient să determinăm în fiecare din cazuri, două soluţii liniar independente y_1, y_2 pentru a scrie orice altă soluţie ca o combinaţie liniară a acestora

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_1 \cdot y_2(x) \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Căutăm soluţii de tip "exponenţial", de forma $y(x) = e^{\lambda x}$, derivatele sunt

$$y'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \quad , \quad y''(x) = (e^{\lambda x})'' = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda\lambda e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Pentru Ex 1 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) - 4y(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 4) = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$ pentru orice x şi orice λ)

Ecuaţia algebrică $(\lambda^2 - 4) = 0$ are două soluţii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, deci obţinem două soluţii pentru ecuaţia diferenţială

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

Acestea sunt liniar independente.

Atunci, conform observaţiei de mai înainte, orice soluţie pentru Ex 1 este o combinaţie liniară a acestor două soluţii

cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex1. este

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pentru Ex 2 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = \lambda^2 e^{\lambda} - 6\lambda e^{\lambda} + 9e^{\lambda} = e^{\lambda}(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)^2 = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$)

Ecuaţia algebrică $(\lambda - 3)^2 = 0$ are două soluţii $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (sau o soluţie dublă),

deci obţinem doar o soluţie pentru ecuaţia diferenţială

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{3x}$$

o altă soluţie, liniar independentă de aceasta este

$$y_2(x) = xe^{3x}$$

Să verificăm faptul că aceasta este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

Derivatele sunt

$$y_2'(x) = (xe^{3x})' = e^{3x} + x \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(1 + 3x)$$

$$y_2''(x) = (xe^{3x})'' = \left[e^{3x}(1 + 3x)\right]' = e^{3x} \cdot 3 + 3e^{3x}(1 + 3x) = e^{3x}(6 + 9x)$$

Înlocuind obţinem

$$y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = e^{3\lambda}(6 + 9x) - 6e^{3\lambda}(1 + 3x) + 9xe^{3\lambda} = e^{3\lambda}(\underbrace{6 + 9x - 6 - 18x + 9x}_{0}) = 0$$

Atunci, conform observaţiei de mai înainte, orice soluţie pentru Ex 2 este o combinaţie liniară a acestor două soluţii

cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex2. este

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x} \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pentru Ex 3 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) + 4y(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4) = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$)

Ecuaţia algebrică $\lambda^2 + 4 = 0$ are două soluţii complexe $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$

deci obţinem două "soluţii" pentru ecuaţia diferenţială, dar acestea au valori complexe

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2xi} \quad \text{şi} \quad y(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2xi}$$

deci aparent fără interes, de vreme ce căutăm în mod evident ca soluţii, funcţii cu valori reale.

Să separăm partea reală şi partea imaginară şi să derivăm o astfel de soluţie cu valori complexe $y = y(x)$

$$y(x) = \underbrace{A(x)}_{\text{Re}} + i\underbrace{B(x)}_{\text{Im}}$$

$$y'(x) = A'(x) + iB'(x) \ \text{ şi } \quad y''(x) = A''(x) + iB''(x)$$

înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$0 = y''(x) + 4y(x) = A''(x) + iB''(x) + 4[A(x) + iB(x)] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{A''(x) + 4A(x)}_{\text{Re}} + i[\underbrace{B''(x) + 4B(x)}_{\text{Im}}] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A''(x) + 4A(x) = 0 \\ B''(x) + 4B(x) = 0 \end{cases}$$

Deci atât partea reală $A = \operatorname{Re} y$ cât şi partea imaginară $B = \operatorname{Im} y$ a soluţiei complexe, sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale.

Pentru $y(x) = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$ obţinem

$$\begin{cases} y_1(x) = A(x) = \operatorname{Re}(y(x)) = \operatorname{Re}(e^{2xi}) = \cos 2x \\ y_2(x) = B(x) = \operatorname{Im}(y(x)) = \operatorname{Im}(e^{2xi}) = \sin 2x \end{cases}$$

Prin urmare funcţiile $\cos 2x$ şi $\sin 2x$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (Ex 3),
de asemenea liniar independente, deci formează o bază pentru spaţiul vectorial al soluţiilor.
Putem deci scrie orice soluţie în forma

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

sau

$$y(x) = C_1 \cdot \operatorname{Re}(e^{2xi}) + C_2 \cdot \operatorname{Im}(e^{2xi}) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex3. este

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Să observăm că soluţia corespunzătoare pentru rădăcina conjugată $\lambda_2 = -2i$, produce şi ea două soluţii liniar independente .

Pentru $y(x) = e^{-2xi} = \cos(-2x) + i \sin(-2x) = \cos 2x - i \sin 2x$ obţinem

$$\begin{cases} A(x) = \operatorname{Re}(y(x)) = \operatorname{Re}(e^{-2xi}) = \cos 2x \\ B(x) = \operatorname{Im}(y(x)) = \operatorname{Im}(e^{-2xi}) = -\sin 2x \end{cases}$$

Funcţiile $\cos 2x$ şi $-\sin 2x$ sunt de asemenea soluţii liniar independente
Dar folosindu-le pe acestea, obţinem exact acelaşi mod de descriere a soluţiei generale şi anume

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2(-\sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_3 \sin 2x \quad , \text{ unde } C_3 = -C_2 \ , \quad C_1, C_3 \in \mathbb{R}$$

■

Aceste trei exemple arată că putem obţine soluţiile liniar independente necesare, dar în mod diferit în funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiilor algebrice obţinute.

3.3 Ecuatii diferentiale liniare de ordin 2 cu coeficienti variabili

se poate si pt pt ordin mai mare

3.4 Ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti constanti, omogene si neomogene. Metoda variatiei constantelor

Revenim acum la cazul general.

Observaţie.
O funcţie de forma $y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

dacă şi numai dacă λ este rădăcină reală a polinomului asociat ecuaţiei diferenţiale (polinom numit "**polinom carateristic**")

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

În plus soluţiile corespunzătoare la rădăcini distincte sunt liniar independente.
Deci dacă toate cele n rădăcini $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt reale şi distincte,
atunci într-adevăr cele n soluţii asociate (de tip exponenţial) $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ sunt liniar independente şi deci formează o bază pentru spaţiul vectorial al tuturor soluţiilor.

Dacă însă unele rădăcini sunt multiple, sau nu sunt reale (ci complexe) , atunci trebuie folosită altă modalitate de a găsi n soluţii liniar independente.

Suntem acum în măsură să prezentăm algoritmul de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi.

Pasul I.
Se rezolvă ecuaţia omogenă asociată

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad , \quad a_n \neq 0 \qquad (2.3)$$

Teoremă. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n omogene, este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie. Fie $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3), adică

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

$$a_n \cdot z^{(n)} + a_{n-1} \cdot z^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot z^{''} + a_1 \cdot z' + a_0 \cdot z = 0$$

Derivăm

$$(y+z)' = y' + z' \quad , \quad (y+z)'' = y'' + z'' \quad , ... \ (y+z)^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)}$$

Apoi

$$a_n(y+z)^{(n)} + a_{n-1}(y+z)^{(n-1)} + ... + a_2(y+z)^{''} + a_1(y+z)' + a_0(y+z) =$$
$$= a_n[y^{(n)} + z^{(n)}] + a_{n-1}[y^{(n-1)} + z^{(n-1)}] + ... + a_2[y'' + z^{''}] + a_1[y' + z'] + a_0[y+z] =$$
$$= [\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y^{''} + a_1 y' + a_0 y}_{0}] + [\underbrace{a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + ... + a_2 z^{''} + a_1' z + a_0 z}_{0}] = 0$$

Deci suma celor două soluţii este de asemenea soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene.
În plus, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ funcţia $\alpha \cdot y(x)$ este de asemenea soluţie deoarece

$$[\alpha y(x)]' = \alpha y'(x) \quad , \quad [\alpha y(x)]'' = \alpha y''(x) \quad , \quad ... \ [\alpha y(x)]^{(n)} = \alpha y^{(n)}(x)$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$a_n[\alpha y(x)]^{(n)} + a_{n-1}[\alpha y(x)]^{(n-1)} + ... + a_2[\alpha y(x)]^{''} + a_1[\alpha y(x)]' + a_0[\alpha y(x)] =$$
$$= a_n \alpha y^{(n)}(x) + a_{n-1} \alpha y^{(n-1)}(x) + ... + a_2 \alpha y''(x) + a_1 \alpha y'(x) + a_0 \alpha y(x) =$$
$$= \alpha[\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y^{''} + a_1 y' + a_0 y}_{0}] = 0$$

În concluzie mulţimea tuturor soluţiilor unei ecuţii diferenţiale omogene este un spaţiu vectorial.
Nu demonstrăm faptul că acest spaţiu vectorial are dimensiune n (egală cu ordinul ecuaţiei).
■

Deci sunt suficiente n soluţii liniar independente pentru a descrie toate soluţiile ecuaţiei omogene.
Iată algoritmul care produce astfel de soluţii.

Pasul I.1 Se consideră **polinomul carateristic** asociat, care are grad $P = n$, deoarece $a_n \neq 0$

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

Se rezolvă **ecuaţia caracteristică** asociată

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

Fie $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ cele n rădăcini (reale sau complexe). Coeficienţii sunt numere reale $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, deci rădăcinile complexe sunt conjugate două câte două.

Teoremă.

i) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, este <u>rădăcină reală de ordin 1</u> (simplă), atunci funcţia $y = y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene (2.3)

ii) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, este <u>rădăcină reală multiplă de ordin k</u>, atunci cele k funcţii $y_1, y_2, ...y_k$

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = e^{\alpha x} \\
&y_2(x) = xe^{\alpha x} \\
&y_3(x) = x^2 e^{\alpha x} \\
&... \\
&y_k(x) = x^{k-1} e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

sunt k soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3)

iii) Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ este <u>rădăcină complexă de ordin 1</u> (simplă), atunci funcţiile z şi w

$$z(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad w(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sunt soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3)

iv) Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ este <u>rădăcină complexă multiplă de ordin k</u>, atunci cele $2k$ funcţii $z_1, z_2, ...z_k$, $w_1, w_2, ...w_k$

$$\begin{array}{ll}
z_1(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x & w_1(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x \\
z_2(x) = \mathrm{Re}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x} \cos \beta x & w_2(x) = \mathrm{Im}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x} \sin \beta x \\
z_3(x) = \mathrm{Re}(x^2 e^{\lambda x}) = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x & w_3(x) = \mathrm{Im}(x^2 e^{\lambda x}) = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\
... & ... \\
z_k(x) = \mathrm{Re}(x^{k-1} e^{\lambda x}) = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & w_k(x) = \mathrm{Im}(x^{k-1} e^{\lambda x}) = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x
\end{array}$$

sunt soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (3).

<u>Demonstraţie</u>.

i) Calculăm mai întâi derivatele succesive

$$y(x) = e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \ , \ \ y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x} \ \ ... \ \ y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

prin urmare înlocuind în ecuaţia diferenţială (3) obţinem

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y =$$

$$= a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x} (\underbrace{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0}_{0}) = 0$$

deorece λ este rădăcină a polinomului caracteristic. Deci funcţia $y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene.

iii) Calculul derivatelor este identic cu cel pentru cazul i)

$$y(x) = e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \ , \ \ y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x} \ \ ... \ \ y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

şi deci înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y =$$

$$= e^{\lambda x} (\underbrace{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0}_{0}) = 0$$

Separăm partea reală şi partea imaginară

$$y(x) = e^{\lambda x} = \underbrace{A(x)}_{\mathrm{Re}\, y} + i \underbrace{B(x)}_{\mathrm{Im}\, y}$$

derivăm

$$y' = A' + iB' \quad , \quad y'' = A'' + iB'' \quad , \quad y''' = A''' + iB''' \quad , \quad ... \quad y^{(n)} = A^{(n)} + iB^{(n)} \quad ,$$

şi obţinem

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$a_n(A^{(n)} + iB^{(n)}) + a_{n-1}(A^{(n-1)} + iB^{(n-1)}) + ... + a_2(A'' + iB'') + a_1(A' + iB') + a_0(A + iB) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\underbrace{a_n A^{(n)} + a_{n-1} A^{(n-1)} + ... + a_2 A'' + a_1 A' + a_0 A}_{\text{Re}}) + i(\underbrace{a_n B^{(n)} + a_{n-1} B^{(n-1)} + ... + a_2 B'' + a_1 B' + a_0 B}_{\text{Im}}) = 0$$

De unde rezultă

$$\begin{cases} a_n A^{(n)} + a_{n-1} A^{(n-1)} + ... + a_2 A'' + a_1 A' + a_0 A = 0 \\ a_n B^{(n)} + a_{n-1} B^{(n-1)} + ... + a_2 B'' + a_1 B' + a_0 B = 0 \end{cases}$$

Ceea ce arată că atât partea reală $z = A = \operatorname{Re} y = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x$
cât şi partea imaginară $w = B = \operatorname{Im} y = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$
sunt soluţii pentru ecuaţia diferenţială omogenă.

Atenţie coeficienţii $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ (sunt reali). Altfel nu are loc descompunerea în parte reală şi imaginară aşa cum apare mai înainte (separând funcţiile A şi B).

ii) , iv) omitem demonstraţia acestora.

■

Practic procedăm astfel.

- Pentru fiecare rădăcină reală simplă (de ordin 1) $\lambda \in \mathbb{R}$ se asociază soluţia

$$y = y(x) = e^{\lambda x}$$

- Pentru fiecare rădăcină reală $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplă de ordin k , se asociază k soluţii liniar independente $y_1, y_2, ...y_k$

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \ , \ y_2(x) = x e^{\lambda x} \ , \ y_3(x) = x^2 e^{\lambda x} \ , \ ... \ , \ y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

- Pentru fiecare rădăcină complexă simplă (de ordin 1) $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ se asociază 2 soluţii liniar independente z şi w

$$z(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad w(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

- Pentru fiecare rădăcină complexă multiplă de ordin k , $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, se asociază $2k$ soluţii liniar independente

$$\begin{array}{ll}
z_1(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x & w_1(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x \\
z_2(x) = \operatorname{Re}(x e^{\lambda x}) = x e^{\alpha x} \cos \beta x & w_2(x) = \operatorname{Im}(x e^{\lambda x}) = x e^{\alpha x} \sin \beta x \\
z_3(x) = \operatorname{Re}(x^2 e^{\lambda x}) = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x & w_3(x) = \operatorname{Im}(x^2 e^{\lambda x}) = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\
... & ... \\
z_k(x) = \operatorname{Re}(x^{k-1} e^{\lambda x}) = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & w_k(x) = \operatorname{Im}(x^{k-1} e^{\lambda x}) = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x
\end{array}$$

Teoremă. Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ sunt rădăcinile reale sau complexe distincte, (fiecare cu ordinul său de multiplicitate), atunci cele n soluţii asociate conform procedeului descris mai înainte sunt liniar independente.

Omitem demonstraţia.

Pasul I.2 În final orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie sub forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$

unde $y_1, y_2, ...y_n$ sunt cele n soluţii liniar independente asociate conform algoritmului descris.

Altfel spus aceasta este forma "**soluţiei generale**" pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3).

Pasul II. Se rezolvă ecuaţia neomogenă iniţială (2.2) folosind **metoda variaţiei constantelor**.

şi anume se caută soluţii de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot y_j(x)$$

Se demonstrează că derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x), C_2(x), .., C_n(x)$ verifică sistemul liniar algebric

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j(x) = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j'(x) = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j''(x) = 0 \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j^{(n-1)}(x) = f(x) \end{array} \qquad (2.4)$$

Acesta este un sistem liniar cu necunoscute funcţiile $C_1'(x), C_2'(x), .., C_n'(x)$. Are determinantul diferit de zero, deci are soluţie unică. Se rezolvă sistemul, apoi se integreaza funcţiile $C_j'(x)$, $\overline{j=1,n}$ şi obţinem

$$C_j(x) = \int C_j'(x)dx + K_j \quad , \quad \overline{j=1,n}$$

În final se obţin soluţiile ecuaţiei diferenţiale neomogene (2) de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x) \quad , \quad K_1, K_2, ..., K_n \in \mathbb{R}$$

■

Comentariu. Întreg algoritmul porneşte de la ipoteza că rădăcinile polinomului caracteristic se pot determina foarte uşor. În caz contrar se apelează la algoritmi de calcul numeric.

Exemple. (ecuaţii liniare omogene)
Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale

a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ b) $y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0$

c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ d) $y'''(x) + y(x) = 0$

Soluţii.
a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 2, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.
Este deci suficient să determinăm 2 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.
Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^x$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

■

b) $\quad y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 3, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 3.

Este deci suficient să determinăm 3 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda + 1)^3 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Pasul I.2 Asociem 3 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = xe^{-x} \quad \text{şi} \quad y_1(x) = x^2 e^{-x}$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 3 soluţii.

Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_3(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} \quad , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

■

c) $\quad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 2, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Este deci suficient să determinăm 2 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Folosim $\quad Re(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1}{2} \quad$ şi $\quad Im(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.

Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

■

d) $\quad y'''(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 3, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 3.

Este deci suficient să determinăm 3 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^3 + 1 = 0$$

$$\lambda^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad \lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Folosim $\quad Re(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} \quad$ şi $\quad Im(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pasul I.2 Asociem 3 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \qquad \text{şi} \qquad y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 3 soluţii.
Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_3(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

■

Exemplu. (ecuaţii neomogene)
Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x} \quad (*)$$

Soluţie.
Pasul I. Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială omogenă.

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.
Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \;\; , \;\; \lambda_2 = -3$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{-2x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

Orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} \;\; , \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene (*)

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$$

căutându-le de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x}$$

Derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (2.4)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{-2x})' + C_2'(x)(e^{-3x})' = e^{2x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = e^{2x} \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţim prima ecuaţie cu 2 şi adunăm la a doua ecuaţie, obţinem

$$\begin{cases} 2C_1'(x)e^{-2x} + 2C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = e^{2x} \end{cases}$$

$$-C_2'(x)e^{3x} = e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad C_2'(x) = -e^{-x}$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(x)e^{-2x} = -(-e^{-x}e^{-3x}) \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = e^{-4x}$$

Integrând obţinem

$$C_1(x) = \int e^{-4x}dx = \tfrac{-1}{4}e^{-4x} + K_1$$
$$C_2(x) = \int -e^{-x}dx = e^{-x} + K_2$$

Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (neomogene) sunt deci de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x} = [\frac{-1}{4}e^{-4x} + K_1]e^{-2x} + [e^{-x} + K_2]e^{-3x}$$

$$y(x) = \frac{-1}{4}e^{-6x} + K_1e^{-2x} + e^{-4x} + K_2e^{-3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

■

3.5 Problema Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Teoremă. (**de existenţă şi unicitate**)
Problema Cauchy asociată undei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (2.2) \\ y(x_0) = b_0 \ , \ y'(x_0) = b_1 \ , \ y''(x_0) = b_2 \ , \ ... \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \quad \text{condiţii iniţiale} \end{cases}$$

are o unică soluţie, pentru orice condiţii iniţiale, adică orice $x_0 \in \mathbb{R}$ şi orice $b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie.
Ideea demonstraţiei este simplă. Se arată că un anume sistem algebric liniar are determinantul diferit de zero, deci are soluţie unică.
Cazul i) dacă $f(x) = 0$, adică ecuaţia diferenţială este omogenă. În acest caz soluţiile sunt de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$

Condiţiile iniţiale formează un sistem algebric liniar

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \qquad (2.5)$$

cu necunoscute $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ şi care are determinantul diferit de zero (nu demonstrăm), deci are soluţie unică, ceea ce înseamnă că există un unic sistem de constante $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că soluţia corespunzătoare

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$

verifică condiţiile iniţiale.
Cazul ii) dacă $f(x) \neq 0$, adică ecuaţia diferenţială nu este omogenă. În acest caz soluţiile sunt de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

Condiţiile iniţiale formează un sistem algebric liniar

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

cu necunoscute cele n constante (de integrare) $K_1, K_2, ..., K_n$ şi care are determinantul diferit de zero (nu demonstrăm), deci are soluţie unică, ceea ce înseamnă că există un unic sistem de constante $K_1, K_2, ..., K_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că soluţia corespunzătoare

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

verifică condiţiile iniţiale.

■

Algoritm de rezolvare a problemei Cauchy.

Se rezolvă mai întâi ecuaţia diferenţială şi apoi se determină constantele de integrare K_j , $j = \overline{1,n}$ rezolvând sistemul liniar obţinut din condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Este necesară calcularea derivatelor de ordin $1, 2, ..., (n-1)$ pentru

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C'_j(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

ceea ce necesită un efort deosebit.le

În principiu se utilizează diferite programe de calcul dedicate sau algoritmi de rezolvare numerică aproximativă a soluţiilor.

Comentariu. Pot exista situaţii reale în care "condiţiile iniţiale" să arate complet diferit. Nu mai sunt neapărat "iniţiale" ci de exemplu

$$\begin{cases} y(x_1) = b_1 \\ y(x_2) = b_2 \\ y(x_3) = b_2 \\ \dots \\ y(x_n) = b_n \end{cases} \qquad (2.6)$$

adică se cunosc (se măsoară) valorile funcţiei $y = y(x)$ în n puncte diferite $x_1, x_2, ..., x_n$. Pentru a obţine o unică soluţie care verifică acest tip de condiţii, este necesar ca sistemul algebric liniar format (2.6) să aibe soluţie unică, ceea ce se întâmplă numai dacă are determinantul diferit de zero.

Faptul că cele n soluţii $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt liniar independente, asigură că doar sistemul (2.5) (corespunzător unor condiţii iniţiale "standard") are determinantul diferit de zero.

Pentru sistemul liniar (2.6) nu mai există o asemenea "garanţie", deci nu mai există neapărat soluţie unică.

Pentru alte tipuri de condiţii "iniţiale" este posibil

(a) să nu existe soluţie pentru problema Cauchy

(b) să existe mai multe soluţii

(c) să existe soluţie unică.

Exemplu.

1. Să se determine soluţia problemei Cauchy (ecuaţie liniară omogenă)

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluţie.

Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială. Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = -2$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

Orice soluţie se scrie

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

care trebuie să verifice şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = [C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}]' = C_1(-1)e^{-x} + C_2(-2)e^{-2x}$$

Deci sistemul algebric liniar corespunzător este

$$\begin{cases} y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1 \\ y'(0) = C_1(-1)e^0 + C_2(-2)e^0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

adunăm cele două ecuaţii şi obţinem $C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 1$.

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = e^{-x}$$

■

2. Să se determine soluţia problemei Cauchy (ecuaţie liniară neomogenă)

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x \quad (*) \ , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluţie.

Pasul I. Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială omogenă.

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 3$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{2x} \quad , \quad y_2(x) = e^{3x}$$

Orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene (*)

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x$$

căutându-le de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$$

Derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (6)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{2x})' + C_2'(x)(e^{3x})' = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^x \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţim prima ecuaţie cu -2 şi adunăm la a doua ecuaţie, obţinem

$$\begin{cases} -2C_1'(x)e^{2x} - 2C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^x \end{cases}$$

$$C_2'(x)e^{3x} = e^x \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = e^{-2x}$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(x)e^{2x} = -e^{-2x}e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = -e^{-x}$$

Integrând obţinem

$$C_1(x) = \int -e^{-x}dx = e^{-x} + K_1$$
$$C_2(x) = \int e^{-2x}dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x} + K_2$$

Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (neomogene) sunt deci de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x} = [e^{-x} + K_1]e^{2x} + [-\frac{1}{2}e^{-2x} + K_2]e^{3x}$$

$$y(x) = e^x + K_1e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + K_2e^{3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + K_1e^{2x} + K_2e^{3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

În fine, ca să fie soluţie a problemei Cauchy, mai trebuie să verifice şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = [\frac{1}{2}e^x + K_1e^{2x} + K_2e^{3x}]' = \frac{1}{2}e^x + 2K_1e^{2x} + 3K_2e^{3x}$$

înlocuind în condiţiile iniţiale obţinem sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} 1 = y(0) = \frac{1}{2} + K_1 + K_2 \\ -1 = y'(0) = \frac{1}{2} + 2K_1 + 3K_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \\ 2K_1 + 3K_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

care se rezolvă şi rezultă

$$K_2 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = 3$$

În final soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + K_1e^{2x} + K_2e^{3x} = \frac{1}{2}e^x + 3e^{2x} - \frac{5}{2}e^{3x}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 3e^{2x} - \frac{5}{2}e^{3x}$$

■

3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$y^{iv}(x) - 5y'''(x) + 12y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -7 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(1) = -7 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \\ y'''(1) = 0 \end{cases}$$

Soluţie.
Ordinul este 4, relativ mare. Ecuaţia carateristică

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 12\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

nu are soluţii numere raţionale şi nici nu pare posibil de rezolvat relativ uşor.

Se poate încerca "ghicirea" soluţiei, dacă e posibil (şi are formă simplă).

Dacă reuşim, atunci conform unei teoreme anterioare aceasta este soluţia problemei Cauchy (soluţia este unică).

Faptul că în condiţiile initiale derivatele sunt zero în $x = 1$, poate "sugera" ideea că soluţia este eventual o funcţie constantă (sau un polinom de grad mic).

Faptul că toate derivatele sunt zero doar în punctul $x = 1$ nu înseamnă că aceste derivate sunt zero şi în orice alt punct.

Totuşi putem încerca să vedem dacă ecuaţia admite ca soluţie o funcţie constantă

$$y = y(x) = K \quad \Rightarrow \quad y' = y'' = y''' = y^{iv} = 0$$

deci înlocuind în ecuatia diferenţială obţinem

$$y^{iv}(x) - 5y'''(x) + 12y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 0 - 0 + 0 - 0 + K = -7$$

deci funcţia constantă $y(x) = -7$ verifică ecuaţia diferenţială şi în mod evident verifică şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(1) = -7 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \\ y'''(1) = 0 \end{cases}$$

Prin urmare aceasta este soluţia problemei Cauchy enunţate.
■

Scopul acestui ultim exemplu, este de a remarca unicitatea soluţiei unei probleme Cauchy.

3.6 Ecuaţii diferenţiale liniare de tip Euler

În cele ce urmează prezentăm un tip special de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi neconstanţi.

Definiţie. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin n de forma

$$a_n x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 \cdot y^{''} + a_1 x \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (6)$$

se numesc **ecuaţii de tip Euler.** Aici $a_n \neq 0$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) matematician şi fizician eleveţian şi-a petrecut viaţa în Germania şi Rusia. Cu contribuţii majore, este considerat unul din marii matematicieni din istorie. Introduce teminologia modernă în matematică, în special în analiză matematică. De exemplu noţiunea de "funcţie", notaţia actuală pentru funcţiile trigonometrice, simbolurile $\sum$, π , i (numere complexe) e (numărul lui Euler) Este renumit pentru lucrări în mecanică, dinamica fluidelor, optică, astronomie.

Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$ şi obţinem o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, care se rezolvă conform algoritmului corespunzător.

Pentru $x < 0$ se procedează analog punând $x = -e^t$. Nu determinăm soluţii definite pe intervale ce conţin punctul 0 .Să facem primele calcule, derivând succesiv (ca funcţii compuse) obţinem

$$z'(t) = [y(e^t)]' = y'(e^t)e^t \quad , \text{ deci} \quad y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$[y'(e^t)] = \left[\frac{z'(t)}{e^t}\right]' \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t)e^t = \frac{z''e^t - z'e^t}{e^{2t}} \quad , \text{deci} \quad y'' = \frac{z'' - z'}{e^{2t}}$$

şi aşa mai departe obţinem derivatele de ordin superior.

Rezolvăm ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi cu soluţiile $z = z(t)$. Apoi revenim la schimbarea de variabilă $t = \ln x$ şi de funcţie pentru a obţinem soluţia ecuaţiei de tip Euler de forma

$$y = y(x) = z(\ln x)$$

Exemple.

E 1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Soluţie.
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de tip Euler.
Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$ şi obţinem

$$z'(t) = [y(e^t)]' = y'(e^t)e^t \quad , \text{ deci } \quad y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$[y'(e^t)] = \left[\frac{z'(t)}{e^t}\right]' \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t)e^t = \frac{z''(t)e^t - z'(t)e^t}{e^{2t}} \quad , \text{deci } \ y'' = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială de tip Euler, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2

$$(e^t)^2 \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}} - e^t \frac{z'(t)}{e^t} + z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z''(t) - z'(t) - z'(t) + z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$$

Rezolvăm acestă ecuaţie diferenţială conform algoritmului descris mai înainte.
Pasul I.1 Asociem ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$z_1(t) = e^t \quad \text{şi} \quad z_2(t) = te^t$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" a ecuaţiei liniare este

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) = C_1 e^t + C_2 te^t \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Soluţia ecuaţiei de tip Euler se obţine revenind la schimbarea de variabilă $t = \ln x$, $x = e^t$

$$y(x) = z(\ln x) = C_1 x + C_2 x \ln x \quad , x > 0 \ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

■

E 2. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3$$

Soluţie.
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de tip Euler.
Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$. Derivatele sunt exact cele deja calculate la exemplul 1.

$$y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t} \quad , \quad y'' = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială de tip Euler, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară (neomogenă) de ordin 2

$$(e^t)^2 \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}} - 2e^t \frac{z'(t)}{e^t} + 2z(t) = (e^t)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z''(t) - z'(t) - 2z'(t) + 2z(t) = e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{3t}$$

Rezolvăm acestă ecuaţie diferenţială liniară conform algoritmului descris mai înainte.
Pasul I. rezolvăm mai întâi ecuaţia liniară omogenă

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

Pasul I.1 Asociem ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$z_1(t) = e^t \quad \text{şi} \quad z_2(t) = e^{2t}$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" a ecuaţiei liniare omogene este

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{3t}$$

căutându-le de forma

$$z(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{2t}$$

Derivatele acestor funcţii necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (6)

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)(e^t)' + C_2'(t)(e^{2t})' = e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţind prima ecuaţie cu -1 , adunând la a doua ecuaţie obţinem

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \end{cases}$$

$$C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = e^t$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(t)e^t = -e^t e^{2t} = -e^{2t}$$

Integrăm şi obţinem

$$C_1(t) = \int -e^{2t}dt = \tfrac{-1}{2}e^{2t} + K_1$$
$$C_2(t) = \int e^t dt = e^t + K_2$$

Soluţiile sunt deci de forma

$$z(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{2t} = [\frac{-1}{2}e^{2t} + K_1]e^t + [e^t + K_2]e^{2t}$$

$$z(t) = \frac{-1}{2}e^{3t} + K_1 e^t + e^{3t} + K_2 e^{2t} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$z(t) = K_1 e^t + \frac{1}{2}e^{3t} + K_2 e^{2t} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Soluţia ecuaţiei de tip Euler se obţine revenind la schimbarea de variabilă $t = \ln x$, $x = e^t$

$$e^{3t} = x^3 \quad , \quad e^{2t} = x^2 \quad ,$$

$$y(x) = z(\ln x) = K_1 x + \frac{1}{2}x^3 + K_2 x^2 \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

■

E 3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$x^2 y''(x) - 2xy(x) + 2y(x) = x^3 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Soluţie.
Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială (de tip Euler)

$$x^2 y''(x) - 2xy(x) + 2y(x) = x^3$$

Conform calculelor din exemplul anterior soluţiile sunt de forma

$$y(x) = z(\ln x) = K_1 x + \frac{1}{2}x^3 + K_2 x^2 \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Apoi mai trebui să verifice şi condiţiile iniţiale. Calculăm derivata

$$y'(x) = K_1 + \frac{3}{2}x^2 + K_2 \cdot 2x$$

Determinăm soluţia problemei Cachy rezolvând sistemul liniar al condiţiilor iniţiale

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 = y(1) = K_1 + \frac{1}{2} + K_2 \\ 0 = y'(1) = K_1 + \frac{3}{2} + K_2 \cdot 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} K_1 + K_2 = \frac{3}{2} \\ K_1 + 2K_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad K_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{9}{2}$$

Deci soluţia problemei Cachy este

$$y(x) = \frac{9}{2}x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

■

3.7 Exemple Rezolvate

E 3.7.1 Să se determine $y = y(x)$ soluţia problemei Cauchy

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 7y''(x) - y(x) = 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$y(2) = 0 \quad , \quad y'(2) = 0 \quad , \quad y''(2) = 0 \quad , \quad y^{(3)}(2) = 0 \quad , \quad y^{(4)}(2) = 0$$

Soluţie.
Ecuaţia diferenţială

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 7y''(x) - y(x) = 0$$

este o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 5 cu coeficienţi constanţi.
Dacă încercăm să aplicăm algoritmul corespunzător, obţinem un polinom caracteristic de grad 5, iar determinarea rădăcinilor acestuia poate fi dificilă.
Problema Cauchy are soluţie unică.
Prin urmare, dacă reuşim să găsim o soluţie - o funcţie (indiferent prin ce mijloace) care verifică atât ecuaţia diferenţială cât şi condiţiile iniţiale, atunci aceea este soluţia căutată.

Soluţia problemei Cauchy , din condiţiile iniţiale are toate derivatele nule în punctul $x = 2$.
Aceasta nu înseamnă că soluţia este neapărat o funcţie constantă.
Totuşi merită încercat dacă o funcţie constantă $y(x) = C$ pentru orice x , poate fi soluţie.
În mod evident, pentru o funcţie constantă, toate derivatele de orice ordin sunt nule, deci înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$\underbrace{y^{(5)}(x)}_{0} + \underbrace{y^{(4)}(x)}_{0} + 7\underbrace{y''(x)}_{0} - \underbrace{y(x)}_{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -C = 0$$

Prin urmare funcţia constantă $y = y(x) = 0$ pentru orice x verifică ecuaţia diferenţială, şi în mod evident şi condiţiile iniţiale.
Deci este soluţia problemei Cauchy.
■

E 3.7.2 Să se determine funcţia $x = x(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x'''(t) - 7x''(t) + x'(t) - 7x(t) = 0 \ , \ x(0) = 0 \ , \ x'(0) = 0 \ , \ x''(0) = 1$$

Soluţie.

Ataşăm ecuaţia carateristică

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2+1) - 7(\lambda^2+1) = 0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+1 = 0 \ \text{ sau } \ \lambda - 7 = 0$$

obţinem rădăcinile

$$\lambda - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 7 \quad , \quad \lambda^2+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = i \quad , \quad \lambda_3 = -i$$

Asociem 3 soluţii liniar independente

$$x_1(t) = e^{7t}$$

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right) = \mathrm{Re}(\cos t + i\sin t) = \cos t \quad , \quad x_2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = \mathrm{Im}(\cos t + i\sin t) = \sin t$$

Soluţiile ecuaţie diferenţiale sunt de forma

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3x_3(t)$$

$$x(t) = C_1e^{7t} + C_2\cos t + C_3\sin t$$

Folosim condiţiile iniţiale.
Mai întâi calculăm derivatele

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[C_1e^{7t} + C_2\cos t + C_3\sin t\right] = C_1 7e^{7t} - C_2\sin t + C_3\cos t$$

$$x''(t) = [x'(t)] = \frac{d}{dt}\left[C_1 7e^{7t} - C_2\sin t + C_3\cos t\right] = C_1 7\cdot 7e^{7t} - C_2\cos t - C_3\sin t$$

Obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} 0 = x(0) = C_1e^{7\cdot 0} + C_2\cos 0 + C_3\sin 0 \\ 0 = x'(0) = C_1 7e^{7\cdot 0} - C_2\sin 0 + C_3\cos 0 \\ 1 = x''(0) = C_1 7\cdot 7e^{7\cdot 0} - C_2\cos 0 - C_3\sin 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 7C_1 + C_3 = 0 \\ 49C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_3 = -7C_1 \\ C_2 = 49C_1 - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 49C_1 - 1 = -C_1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{50} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{50} \quad , \quad C_3 = -\frac{7}{50}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{1}{50}e^{7t} - \frac{1}{50}\cos t - \frac{7}{50}\sin t$$

■

E 3.7.3 Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^t \ , \ x(0) = 1 \ , \ x'(0) = 0$$

Soluţie.
Este o ecuaţie liniară de ordin 2. Folosim algoritmul corespunzător.
Pas I Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$$

Ecuaţia carateristică ataşată este

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3 = 4$$

Rădăcinile sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

Asociem două soluţii liniar independente

$$x_1(t) = e^{3t} \quad \text{şi} \quad x_2(t) = e^t$$

Soluţiile ecuaţiei liniare omogene sunt de forma

$$x(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^t$$

Pas II Folosim metoda variaţiei constantelor.
Căutăm soluţii pentru ecuaţia neomogenă $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^t$
de forma

$$x(t) = C_1(t) \cdot e^{3t} + C_2(t) \cdot e^t$$

Deivatele funcţiilor necunoscute $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ verifică sistemul liniar

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot e^{3t} + C_2'(t) \cdot e^t = 0 \\ C_1'(t) \cdot \left(e^{3t}\right)' + C_2'(t) \cdot \left(e^t\right)' = e^t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2'(t) \cdot e^t = -C_1'(t) \cdot e^{3t} \\ C_1'(t) \cdot 3e^{3t} + C_2'(t) \cdot e^t = e^t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$C_2'(t) = -C_1'(t) \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) \cdot 3e^{3t} + \left[-C_1'(t) \cdot e^{2t}\right] \cdot e^t = e^t$$

$$C_1'(t) \cdot 2e^{3t} = e^t \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) = \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$C_1(t) = \int C_1'(t) dt = \int \frac{1}{2} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-2t}}{-2} + K_1 = -\frac{1}{4} e^{-2t} + K_1$$

$$C_2'(t) \cdot e^t = -C_1'(t) \cdot e^{3t} = -\frac{1}{2} e^{-2t} \cdot e^{3t} = -\frac{1}{2} e^t \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2}$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t) dt = \int \frac{-1}{2} dt = -\frac{1}{2} t + K_2$$

Souţia ecuaţiei neomogene este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{4} e^{-2t} + K_1\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2} t + K_2\right) \cdot e^t$$

Calculăm derivata

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{1}{4} e^{-2t} + K_1\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2} t + K_2\right) \cdot e^t\right] = \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{4} e^t + K_1 \cdot e^{3t} - \frac{1}{2} t \cdot e^t + K_2 \cdot e^t\right]$$

$$x'(t) = \left[-\frac{1}{4} e^t + K_1 \cdot 3e^{3t} - \frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} t \cdot e^t + K_2 \cdot e^t\right]$$

Folosim condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

$$1 = x(0) = \left(-\frac{1}{4} e^{-2 \cdot 0} + K_1\right) \cdot e^{3 \cdot 0} + \left(-\frac{1}{2} \cdot 0 + K_2\right) \cdot e^0$$

$$0 = x'(0) = \left[-\frac{1}{4} e^0 + K_1 \cdot 3e^{3 \cdot 0} - \frac{1}{2} \cdot e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^0 + K_2 \cdot e^0\right]$$

obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} + K_1 + K_2 = 1 \\ \left[-\frac{1}{4} + K_1 \cdot 3 - \frac{1}{2} + K_2\right] = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_2 = \frac{3}{4} - K_1 \\ K_1 \cdot 3 + \frac{3}{4} - K_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2K_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{3}{4} - K_1 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2} t + \frac{5}{4}\right) \cdot e^t$$

■

E 3.7.4 Să se determine soluţia $y = y(x)$ problemei Cauchy

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0 \quad , \quad \text{cu condiţiile iniţiale } \ y(1) = 0 \ \ , \ \ y'(1) = 2$$

Soluţie.
Avem o ecuaţie de tip Euler.
Condiţiile iniţiale sunt în punctul $x = 1$, deci căutăm soluţii în vecinătatea lui 1 .
Putem presupune deci că $x > 0$.
Facem schimbarea de variabilă $x = e^t \quad , \quad y(x) = y(e^t) = z(t)$
Calculăm derivatele

$$\frac{d}{dt}\left[y(e^t)\right] = z'(t) \quad \Leftrightarrow \quad y'(e^t) \cdot e^t = z'(t) \quad \Rightarrow \quad y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

Apoi derivăm încă odată

$$\frac{d}{dt}\left[\ y'(e^t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{z'(t)}{e^t}\right] \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t) \cdot e^t = \frac{z''(t) \cdot e^t - z'(t) \cdot e^t}{(e^t)^2}$$

$$y''(e^t) = \frac{z''(t) - z'(t)}{(e^t)^2}$$

Înlocuim în ecuţia difereţială şi obţinem

$$(e^t)^2 \cdot \frac{z''(t) - z'(t)}{(e^t)^2} - e^t \cdot \frac{z'(t)}{e^t} - z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z''(t) - z'(t) - z'(t) - z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 2z'(t) - z(t) = 0$$

Aceasta este o ecuaţie liniară de ordin 2.
Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

Rădăcinile sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

Ataşăm 2 soluţii liniar independente

$$z_1(t) = e^{(1+\sqrt{2})t} \quad \text{şi} \quad z_1(t) = e^{(1-\sqrt{2})t}$$

Soluţiile ecuaţiei liniare sunt de forma

$$z(t) = C_1 \cdot z_1(t) + C_2 \cdot z_2(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

Revenim la schimbarea de variabilă $x = e^t \quad , \quad t = \ln x$
şi obţinem soluţiile ecuaţiei diferenţiale iniţiale

$$y(x) = z(\ln x) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})\ln x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})\ln x}$$

$$e^{(1+\sqrt{2})\ln x} = \left[e^{\ln x}\right]^{(1+\sqrt{2})} = [x]^{(1+\sqrt{2})} \quad , \quad e^{(1-\sqrt{2})\ln x} = \left[e^{\ln x}\right]^{(1-\sqrt{2})} = [x]^{(1-\sqrt{2})}$$

Deci

$$y(x) = C_1 x^{(1+\sqrt{2})} + C_2 x^{(1-\sqrt{2})}$$

derivata este

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[C_1 x^{(1+\sqrt{2})} + C_2 x^{(1-\sqrt{2})}\right] = C_1(1+\sqrt{2})x^{(1+\sqrt{2})-1} + C_2(1-\sqrt{2})x^{(1-\sqrt{2})-1}$$

$$y'(x) = C_1(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} + C_2(1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}}$$

Folosim condiţiile iniţiale $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$

$$0 = y(1) = C_1 \cdot 1^{(1+\sqrt{2})} + C_2 \cdot 1^{(1-\sqrt{2})}$$

$$2 = y'(1) = C_1(1+\sqrt{2}) \cdot 1^{\sqrt{2}} + C_2(1-\sqrt{2}) \cdot 1^{-\sqrt{2}}$$

obţinem sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1(1+\sqrt{2}) + C_2(1-\sqrt{2}) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$C_1(1+\sqrt{2}) - C_1(1-\sqrt{2}) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot 2\sqrt{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{2}} x^{(1-\sqrt{2})}$$

■

4 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 1

Definiţie. Prin **sistem liniar de ecuatii diferenţiale** (de ordinul I) se înţelege un sistem liniar (scris în formă "vectorială" sau "matricială")

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \qquad (*)$$

unde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$, $X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ...x_n'(t))$, $B(t) = (b_1(t), b_2(t), ...b_n(t))$, iar $A(t)$ este matrice pătrată $n \times n$,

matricea "coeficienţilor", coeficienţii fiind elementele matricii $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

cu $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ şi $b_i(t)$ funcţii de clasă C^1, definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Putem scrie sistemul în şi forma

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ ... \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij}(t) & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

sau în mod "explicit"

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t) \cdot x_1(t) + a_{12}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{1n}(t) \cdot x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t) \cdot x_1(t) + a_{22}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{2n}(t) \cdot x_n(t) + b_2(t) \\ .... \\ x_n'(t) = a_{n1}(t) \cdot x_1(t) + a_{n2}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{nn}(t) \cdot x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Prin urmare, derivatele de ordin 1, sunt combinaţii liniare ale funcţiilor.

Prin **soluţie a sistemului** se înţelege un sistem de funcţii (mărimi scalare) $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ de clasă C^1, care verifică sistemul (*).

Problema Cauchy constă în sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale (*) împreună cu condiţii iniţiale :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \qquad (*) \\ \begin{pmatrix} x_1(t_0) = \beta_1 \\ x_2(t_0) = \beta_2 \\ ... \\ x_n(t_0) = \beta_n \end{pmatrix} \qquad \text{(CI)} \end{cases}$$

Prin **soluţie a Problemei Cauchy** se înţelege un sistem de funcţii (mărimi scalare) $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ de clasă C^1, care verifică sistemul (*) şi condiţiile iniţiale (CI).

Din punct de vedere fizic, condiţiile iniţiale reprezintă valori măsurate ale mărimilor scalare $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ în t_0,

la "momentul "t_0" dacă t reprezintă "timpul". t_0 poate fi efectiv un moment "iniţial" , sau moment "final" în evoluţia unui sistem.

Esenţial este faptul că cele n mărimi scalare sunt măsurate toate în acelaşi moment, sau acelaşi punct t_0.

4.1 Sisteme de ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi omogene şi neomogene. Metoda variaţiei constantelor

În cele ce urmează ne vom limita la a descrie algoritmul de rezolvare a sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi. Un sistem liniar are "**coeficienţi constanţi**", dacă funcţiile $a_{ij}(t) \overset{not}{=} a_{ij}$ sunt constante.

Fie deci un sistem liniar cu coeficienţi constanţi.

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t) \quad (**)$$

Pasul I. Se rezolvă sistemul liniar omogen asociat

$$X'(t) = A \cdot X(t)$$

Să observăm că aceste soluţii sunt de fapt de clasă C^∞ (adică indefinit derivabile).

Observaţie. Mulţimea soluţiilor pentru un sistem liniar omogen, formează un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie.

Să observăm că $X(t) = 0$ pentru orice t este soluţie.

Altfel spus sistemul de funcţii nule

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)) = (0, 0, ..., 0)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \\ \quad ... \\ x_n(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pentru orice } t$$

verifică sistemul.

Acest fapt este total nerelevant din punct de vedere fizic, deoarece descrie situaţia în care mărimile scalare $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ sunt constant nule.

Dar funcţia nulă este elementul neutru pentru un spaţiu vectorial de funcţii.

Considerăm două soluţii ale sistemului $X = X(t)$ şi $Y = Y(t)$, deci

$$X'(t) = A \cdot X(t) \ \text{ şi } \quad Y'(t) = A \cdot Y(t)$$

adunând cele două relaţii obţinem

$$X'(t) + Y'(t) = A \cdot X(t) + A \cdot Y(t) \quad \Leftrightarrow \quad [X(t) + Y(t)]' = A \cdot [X(t) + Y(t)]$$

deci suma soluţiilor este de asemenea o soluţie a sistemului.

Înmulţind cu un scalar obţinem

$$\alpha X'(t) = \alpha A \cdot X(t) \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha X]'(t) = A \cdot [\alpha X(t)]$$

deci şi $\alpha X(t)$ este de asemenea soluţie a sistemului. Deci mulţimea soluţiilor pentru un sistem liniar omogen este un spaţiu vectorial.

Nu prezentăm şi demonstraţia faptului că acest spaţiu vectorial are dimensiune n.

■

Prin urmare sunt suficiente$n$ soluţii liniar independente pentru a descrie toate soluţiile unui sistem liniar omogen.

Forma de scriere "vectorială" este asemănătoare cu o ecuaţie liniară

$$x'(t) = a \cdot x(t) \ , \ \text{cu}$$

ale cărei soluţii se obţin astfel

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int a dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x(t)| = at + k \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = e^{at} \cdot c \ \ , \ \ c = \pm e^{k}$$

Acest fapt duce la ideea de a căuta soluţii pentru sistemul liniar omogen de formă "exponenţială"

$$X(t) = e^{\lambda t} v \ \ , \ \ v \text{ vector din } \mathbb{R}^n$$

Derivând obţinem

$$X'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} v\right) = \lambda e^{\lambda t} v$$

înlocuind în sistemul liniar obţinem

$$X'(t) = A \cdot X(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} v = A \cdot \left(e^{\lambda t} v\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} \left(A \cdot v\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda v = (A \cdot v)$$

deoarece $e^{\lambda t} \neq 0$.
Ultima relaţie obţinută $A \cdot v = \lambda v$ reprezintă în algebra liniară, faptul că
- v este vector propriu pentru matricea A (dacă $v \neq 0$)
- λ este valoare proprie pentru matricea A
Rescriem acestă relaţie în forma

$$(A - \lambda I)\, v = 0 \ \ , \quad I \ \text{ este matricea unitate}$$

Reprezintă un sistem liniar algebric, matricea sistemului este $A - \lambda I$. Discuţia unui astfel de sistem algebric este cunoscută.
- sistemul algebric are unica soluţie $v = 0$ dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I) \neq 0$
- sistemul algebric are soluţii nenule $v \neq 0$ dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I) = 0$

Prin urmare funcţii de forma $X(t) = e^{\lambda t} v$ sunt soluţii pentru sistemul liniar omogen de ecuaţii diferenţiale (**) dacă şi numai dacă
- λ este soluţie pentru ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$
- v este soluţie a sistemului liniar algebric $(A - \lambda I)\, v = 0$

În continuare descriem cum se obţin n soluţii liniar independente. (metoda vectorilor şi valorilor proprii).
Iată principalele etape.
1. <u>Se determină valorile proprii ale matricii A</u> rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$,
$\det(A - \lambda I)$ este un polinom de grad n , deci are n rădăcini (reale sau complexe).
Polinomul are coeficienţi reali, deci rădăcinile complexe sunt conjugate două câte două.
Fie $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ aceste valori proprii (rădăcini reale sau complexe).
2. Pentru fiecare <u>valoare proprie reală de ordin 1 (simplă)</u> $\lambda \in \mathbb{R}$
- se determină o <u>soluţie a sistemului algebric $(A - \lambda I)\, v = 0$</u>
adică un vector propriu $v \in \mathbb{R}^n$
- se asociază soluţia

$$X(t) = e^{\lambda t} v$$

3. Pentru fiecare <u>valoare proprie complexă ordin 1 (simplă)</u> $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$
- se determină o <u>soluţie a sistemului algebric $(A - \lambda I)\, v = 0$</u>
adică un vector propriu complex $w \in \mathbb{C}^n$
- se asociază două soluţii

$$X_1(t) = \text{Re}(e^{\lambda t} w) \quad , \quad X_2(t) = \text{Im}(e^{\lambda t} w)$$

4. Pentru fiecare <u>valoare proprie reală</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ <u>multiplă de ordin k</u> , se calculează rangul matricii $rang(A - \lambda I)$
i) dacă $n - rang(A - \lambda I) = k$, atunci
- se determină k soluţii liniar independente ale sistemului algebric $\det(A - \lambda I) = 0$
k vectori proprii liniar independenţi $v_1, v_2, ...v_k \in \mathbb{R}^n$ şi
- se asociază k soluţii liniar independente corespunzătoare

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 \ , \ X_2(t) = e^{\lambda t} v_2 \ , \ ... \ , \ X_k(t) = e^{\lambda t} v_k$$

ii) dacă $n - rang(A - \lambda I) < k$, atunci se caută soluţie de forma

$$X(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

unde $P(t)$ este polinom de grad $k-1$ cu coeficienţi în $\mathbb{R}^n$.
Faptul că soluţia $X(t) = e^{\lambda t}P(t)$ verifică sistemul $X'(t) = A \cdot X(t)$ înseamnă

$$\lambda e^{\lambda t}P(t) + e^{\lambda t}P'(t) = e^{\lambda t}P(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda P(t) + P'(t) = P(t) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)P(t) + P'(t) = 0$$

Apoi se identifică coeficienţii necunoscuţi şi se obtine un sistem liniar algebric cu $k \cdot n$ necunoscute reale.
Rangul sistemului este $k(n-1)$, deci fie $c_1, c_2, ..., c_k$ necunoscutele secundare.
Se rezolvă sistemul algebric exprimând necunoscutele principale în funcţie de cele secundare şi se rescrie soluţia $X(t)$ în forma

$$X(t) = e^{\lambda t}P(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot X_j(t)$$

Funcţiile $X_j(t)$ obţinute sunt cele k soluţii liniar independente căutate.

5. Pentru fiecare valoare proprie complexă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ (şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$) , multiple de ordin k ,
se calculează rangul $rang(A - \lambda I)$, apoi
i) dacă $n - rang(A - \lambda I) = \dim(\ker(A - \lambda I) = k$, atunci se pot determina k vectori liniari independenţi $w_1, w_2, ...w_k \in \mathbf{C}^n$ şi
se asociază $2k$ soluţii liniar independente corespunzătoare

$$X_1(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}w_1) \ , \ X_2(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}w_2) \ , \ ... \ , \ X_k(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}v_k)$$
$$Y_1(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}w_1) \ , \ Y_2(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}w_2) \ , \ ... \ , \ Y_k(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}w_k)$$

ii) dacă $\dim(\ker(A - \lambda I)) < k$, atunci se procedează exact ca pentru rădăcini reale multiple,
adica se caută soluţii de forma

$$Y(t) = e^{\lambda t}P(t)$$

unde însă $P(t)$ este polinom de grad $k-1$ cu coeficieni în $\mathbb{C}^n$,
se identifică coeficienţii, se rezolvă sistemul liniar algebric rezultat, obţinând k necunoscute secundare complexe,
se rescrie soluţia în funcţie de necunoscutele secundare

$$Y(t) = e^{\lambda t}P(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot Y_j(t)$$

şi în final se obţin $2k$ soluţii liniar independente $\mathrm{Re}(Y_j(t))$, $\mathrm{Im}(Y_j(t))$, $j = \overline{1,k}$

6. În final soluţia "generală" se scrie ca o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute anterior

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j(t)$$

Pasul II. Se aplică metoda variaţiei constantelor pentru a determină soluţiile sistemului nemogen (**) iniţial,
şi anume se caută soluţii de forma

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \cdot X_j(t)$$

care înlocuite în (**) produc sistemul liniar algebric

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \cdot X_j(t) = B(t)$$

cu necunoscute $c_j'(t)$, $j = \overline{1,n}$, rescris în forma

$$c_1'(t)\begin{pmatrix} \\ X_1(t) \\ \end{pmatrix} + c_1'(t)\begin{pmatrix} \\ X_2(t) \\ \end{pmatrix} + ... + c_1'(t)\begin{pmatrix} \\ X_n(t) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

se rezolvă sistemul (ca un sistem algebric)
se integrează functiile $c'_j(t)$ obţinute

$$c_j(t) = \int c'_j(t)dt + K_j$$

soluţia finală se scrie

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \cdot X_j(t)$$

Nu mai ramane decat să menţionăm **problema Cauchy** ataşată unui sistem liniar

$$\begin{array}{lr} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) & (*) \\ X_1(t_0) = \beta_1 \ , X_2(t_0) = \beta_2 \ , \ ... \ , \ X_n(t_0) = \beta_n & \text{(CI)} \end{array}$$

pentru care se rezolvă sistemul liniar, iar apoi din condiţiile iniţiale (CI) se determină constantele (de integrare) K_j , $j = \overline{1,n}$.

Exemple.

1. Să se determine funcţiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ care verifică problema Cauchy, definită de sistemul liniar

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases}$$

şi de condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 3$

Soluţie.
Sistemul de ecuaţii diferenţiale are coeficienţi constanţi, aplicăm algoritmul descris mai înainte.
Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \Leftrightarrow \ \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ -(\lambda-1)^2(\lambda+1) - 2 - (\lambda - 1) - 2(-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-1)^2(\lambda+1) + \lambda + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1 + 1) = 0$$

valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$
Determinăm 3 soluţii liniar independente.
Determinăm câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii,
adică un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ care verifică $Av = \lambda v \ \Leftrightarrow \ (A - \lambda I)v = 0$
Pentru $\lambda = 0$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 0I)v = 0$,
unde $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$Av = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

adunând primele două ecuaţii obţinem $y = 0$, iar din ultima ecuaţie $x = z = \alpha$
Deci vectorii proprii sunt $v = (x, y, z) = (\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
în particular, pentru $\alpha = 1$ obţinem un vector propriu $v_1 = (1, 0, 1)$
se asociază soluţia (în acest caz o funcţie care este constantă)

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 = e^{0t}(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

Pentru $\lambda = 2$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 2I)v = 0$, unde $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$(A - 2I) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

adunând primele două ecuaţii obţinem $-2x - 3y = 0 \Rightarrow\ y = -\frac{2}{3}x$, iar din ultima ecuaţie $x = 3z = 3\alpha$
Deci vectorii propri sunt $v = (x, y, z) = (3\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(3, -2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
în particular pentru $\alpha = 1$ obţinem un al doilea vector propriu $v_2 = (3, -2, 1)$ şi
se asociază soluţia

$$X_2(t) = e^{\lambda t} v_2 = e^{2t}(3, -2, 1)$$

Pentru $\lambda = -1$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - (-1)I)v = 0 \Leftrightarrow (A + I)v = 0$
unde $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$(A + I) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

din ultima ecuaţie $x = 0$, iar din prima ecuaţie obţinem $z = -2y$, $y = \alpha$
Deci vectorii propri sunt $v = (x, y, z) = (0, \alpha, -2\alpha) = \alpha(0, 1, -2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
în particular pentru $\alpha = 1$ obţinem un al treilea vector propriu $v_3 = (0, 1, -2)$ şi
se asociază soluţia

$$X_3(t) = e^{\lambda t} v_3 = e^{-t}(0, 1, -2)$$

În final soluţia "generală" se scrie ca o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute anterior

$$X(t) = \sum_{j=1}^{3} c_j \cdot X_j(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(t) = c_1 \cdot (1, 0, 1) + c_2 \cdot e^{2t}(3, -2, 1) + c_3 \cdot e^{-t}(0, 1, -2)$$

sau scriind vectorii "pe coloană"

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Deci soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale sunt

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + 3c_2 e^{2t} + c_3 \cdot 0 = c_1 + 3c_2 e^{2t} \\ y(t) &= c_1 \cdot 0 + c_2(-2e^{2t}) + c_3 e^{-t} = c_2(-2e^{2t}) + c_3 e^{-t} \\ z(t) &= c_1 + c_2 e^{2t} + c_3(-2e^{-t}) \end{aligned}$$

Acum ţinând seama de condiţiile iniţiale obţinem sistemul liniar algebric

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + 3c_2 e^{2\cdot 0} \\ -1 &= y(0) = c_2(-2e^{2\cdot 0}) + c_3 e^{-0} \\ 3 &= z(0) = c_1 + c_2 e^{2\cdot 0} + c_3(-2e^{-0}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 \\ -2c_2 + c_3 = -1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 3 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie $2c_1 = 1 - 3c_2$, din a doua ecuaţie $c_3 = -1 + 2c_2$
înlocuim în ultima eciaţie $1 - 3c_2 + c_2 - 2(-1 + 2c_2) = 3$
obţinem $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, $c_3 = -1$
Soluţia problemei Cauchy este

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \\ y(t) &= -e^{-t} \\ z(t) &= 1 + 2e^{-t} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

2. Să se determine funcţiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, care verifică sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + t^2 \\ y'(t) = x(t) - y(t) + t \end{cases}$$

<u>Soluţie.</u>
<u>Pasul I</u> Rezolvăm mai întâi sistemul liniar omogen asociat

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 + 1 = 0$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, sau $\lambda = 0$ este rădăcină dublă
În acest caz $rang(A - 0I)) = rangA = 1 < 2$, unde 2 este ordinul rădăcinii.
Deci se caută soluţie de forma

$$X(t) = e^{0t}P(t) = (a,b)t + (c,d) = (at, bt) + (c,d) = (at + c, bt + d)$$

unde $P(t)$ este polinom de grad $= 2 - 1$ cu coeficienţi în $\mathbb{R}^2$.
Înlocuind în sistem obţinem

$$X'(t) = AX(t) \quad \Leftrightarrow \quad P'(t) = AP(t) \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at + c \\ bt + d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b) = (at + c - bt - d, at + c - bt - d)$$

Rezultă sistemul liniar algebric

$$\begin{cases} at + c - bt - d = a \\ at + c - bt - d = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a-b)t + c - d = a \\ (a-b)t + c - d = b \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii şi obţinem alt sistem liniar algebric

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ c - d = a \\ a - b = 0 \\ c - d = b \end{cases}$$

Rezultă $a = b = \alpha$, $c - d = \alpha$, deci soluţiile sunt $a = b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \beta - \alpha$,
iar soluţiile pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$X(t) = P(t) = (a,b)t + (c,d) = (\alpha,\alpha)t + (\beta, \beta - \alpha) = \alpha \left[\underbrace{(1,1)t + (0,-1)} \right] + \beta \left[\underbrace{(1,1)} \right]$$

Deci asociem două soluţii

$$X_1(t) = (1,1)t + (0,-1) = (t, t-1) \quad , \quad X_2(t) = (1,1)$$

Soluţia generală a sistemului omogen se scrie ca o combinaţie liniară

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X(t) = c_1 \left[(1,1)t + (0,-1) \right] + c_2(1,1)$$

Pasul II Folosim metoda variaţiei constantelor, căutăm soluţii de forma

$$X(t) = c_1(t) \cdot X_1(t) + c_2(t) \cdot X_2(t)$$

care înlocuite în sistemul neomogen produc sistemul liniar algebric

$$c_1'(t) \cdot X_1(t) + c_2'(t) \cdot X_2(t) = B(t) = (t^2, t)$$

$$c_1'(t) \cdot \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} + c_2'(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) = t^2 \\ c_1'(t) \cdot (t-1) + c_2'(t) = t \end{cases}$$

Scădem ecuaţiile şi obţinem

$$c_1'(t) = t^2 - t \quad \Rightarrow \quad c_2'(t) = t^2 - tc_1'(t) = t^2 - t^3 + t^2 = 2t^2 - t^3$$

Integrăm şi obţinem

$$c_1(t) = \int (t^2 - t)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1$$

$$c_2(t) = \int (2t^2 - t^3)dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2$$

Soluţiile sistemului liniar de ecuaţii diferenţiale sunt

$$X(t) = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] \cdot X_1(t) + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right] \cdot X_2(t)$$

sau

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

separând $x(t)$ şi $y(t)$ obţinem

$$x(t) = t\left[\frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + K_1 t\right] + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right]$$

$$y(t) = (t-1)\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right]$$

■

3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = 3$, $y(0) = -4$

Soluţie.
Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 + 1 = 0$$

Rădăcinile sunt complexe $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$
Se determină un vector propriu complex $w \in \mathbb{C}^2$, $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, $w = (a + ib, c + id)$

$$(A - \lambda I)w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = 0$$

Obţinem un sistem liniar algebric

$$\begin{cases} (1-i)(a+ib)-(c+id)=0 \\ 2(a+ib)+(-1-i)(c+id)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c+i(-a+b-d)=0 \\ 2a-c+d+i(2b-c-d)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ -a+b-d=0 \\ 2a-c+d=0 \\ 2b-c-d=0 \end{cases}$$

Rangul sistemului este 2 , folosim doar ultimele două ecuaţii

$$\begin{cases} c-d=2a \\ c+d=2b \end{cases}$$

le adunăm şi obţinem $c=a+b$, $d=b-a$, deci $w=(a+ib,a+b+i(b-a))=(a,a+b)+i(b,b-a)$
Pentru $a=1$ şi $b=1$ obţinem $w=(1,2)+i(1,0)=u+iv$
şi se asociază două soluţii

$$X_1(t)=\mathrm{Re}(e^{\lambda t}w)=\mathrm{Re}\left(e^{it}(u+iv)\right)=\mathrm{Re}\left[(\cos t+i\sin t)(u+iv)\right]=\cos t\cdot u-\sin t\cdot v$$

$$X_2(t)=\mathrm{Im}(e^{\lambda t}w)=\mathrm{Im}\left(e^{it}(u+iv)\right)=\mathrm{Im}\left[(\cos t+i\sin t)(u+iv)\right]=\cos t\cdot v+\sin t\cdot u$$

$$X_1(t)=\cos t\cdot u-\sin t\cdot v=\cos t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}$$

$$X_2(t)=\cos t\cdot v+\sin t\cdot u=\cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale este o combinaţie liniară

$$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)$$

sau

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}$$

separând $x(t)$ şi $y(t)$ obţinem

$$x(t)=c_1\left(\cos t-\sin t\right)+c_2(\cos t+\sin t)$$
$$y(t)=c_1 2\cos t+c_2 2\sin t$$

Folosind condiţiile iniţiale obţinem sistemul liniar algebric

$$3=x(0)=c_1\left(\cos 0-\sin 0\right)+c_2(\cos 0+\sin 0)$$
$$-4=y(0)=c_1 2\cos 0+c_2 2\sin 0$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=3 \\ 2c_1=-4 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=-2 \quad \Rightarrow \quad c_2=5$$

Iar soluţia problemei Cauchy este

$$x(t)=-2\left(\cos t-\sin t\right)+5(\cos t+\sin t)=3\cos t+7\sin t$$
$$y(t)=-2\cdot 2\cos t+5\cdot 2\sin t=-4\cos t+10\sin t$$

■
exemplu
Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=x(t)+2y(t) \end{cases} \quad , \quad \text{cu} \quad x(0)=1\ ,\ y(0)=2$$

Soluţie.
Scriem matricea sistemului liniar
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
calculăm valorile proprii
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
rădăcinile sunt reale $\lambda = 1$ şi $\lambda = 3$ şi de ordinul 1.
Determinăm vectorii proprii corespunzători
Pentru $\lambda = 1$
$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
obţinem sistemul liniar
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = -a$$
deci vectorii proprii sunt de forma $v = (a, -a)$, alegem vectorul $v_1 = (1, -1)$
Procedăm analog şi pentru $\lambda = 3$
$$(A - 3 \cdot I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
obţinem sistemul liniar
$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = a$$
deci vectorii proprii sunt de forma $v = (a, a)$, alegem vectorul $v_2 = (1, -1)$
se asociază soluţiile (liniar independente) scrise vectorial
$$X_1(t) = e^t v_1 \ , \quad X_2(t) = e^{3t} v_2$$
soluţia sistemul este o combinaţie liniară
$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 e^t v_1 + C_2 e^{3t} v_2$$
sau scris explicit
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sau
$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$
$$y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$
constantele C_1, C_2 se determină din condiţiile iniţiale $x(0) = 2$, $y(0) = 2$
$$1 = x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2$$
$$2 = y(0) = -C_1 e^0 + C_2 e^{3 \cdot 0} = -C_1 + C_2$$
deci
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$
care duce la $C_2 = 3/2$ şi $C_1 = -1/2$
deci soluţia problemei Cauchy este
$$x(t) = \frac{-1}{2} e^t + \frac{3}{2}{}_2 e^{3t}$$
$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}$$

4.2 Metoda reducerii la o ecuatie liniara de ordin superior

Observaţie.
Orice sistem de ecuaţii diferenţiale liniare (de ordin 1) cu coeficienţi constanţi,
se poate "reduce" la o ecuaţie liniară de ordin superior cu coeficienţi constanţi.

Exemplu. Să rezolvăm problema Cauchy anterioară

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{cu} \;\; x(0) = 3 \;,\; y(0) = -4$$

Din prima ecuaţie $y(t) = x(t) - x'(t)$, înlocuind în a doua ecuatie obţinem

$$[x(t) - x'(t)]' = 2x(t) - [x(t) - x'(t)]$$

$$x'(t) - x''(t) = x(t) + x'(t) \quad \Leftrightarrow \quad x''(t) + x(t) = 0$$

Care se poate rezolva conform algoritmului corespunzător.
Polinomul caracteristic este $\lambda^2 + 1 = 0$, rădăcinile sunt $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,
deci se asociază două soluţii liniar independente

$$x_1(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad x_2(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \sin t$$

iar soluţia generală este $x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t$
rezultă şi soluţia pentru $y(t) = x(t) - x'(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t - (-k_1 \sin t + k_2 \cos t) = (k_1 - k_2) \cos t + (k_1 + k_2) \sin t$
Acum folosim condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} 3 &= x(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 \\ -4 &= y(0) = (k_1 - k_2) \cos 0 + (k_1 + k_2) \sin 0 \end{aligned}$$

$$k_1 = 3 \quad , \quad -4 = 3 - k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 7$$

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$\begin{cases} x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t = 3 \cos t + 7 \sin t \\ y(t) = (k_1 - k_2) \cos t + (k_1 + k_2) \sin t = -4 \cos t + 10 \sin t \end{cases}$$

Am obţinut deci exact aceeaşi soluţie ca în exemplul 3.
■

4.3 Exemple Rezolvate

3. Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad , \;\; x(0) = 1 \;,\; y(0) = 1$$

Soluţie.
Pas I
Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$$

Valorile proprii sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \quad , \quad \lambda_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Determinăm 3 soluţii liniar independente.
Determinăm câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii,
adică un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$
<u>Pentru $\lambda = 4$</u> , determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 4I)v = 0$, obţinem sistemul

$$(A - 4I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

Deci vectorii proprii sunt de forma $v = (x, y) = (2y, y)$
în particular, pentru $y = 1$ obţinem un vector propriu $v_1 = (2, 1)$
se asociază soluţia corespunzătoare

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 = e^{4t}(2, 1)$$

<u>Pentru $\lambda = 1$</u> , determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 1 \cdot I)v = 0$, obţinem sistemul

$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Deci vectorii proprii sunt de forma $v = (x, y) = (-y, y)$
în particular, pentru $y = 1$ obţinem un vector propriu $v_2 = (-1, 1)$
se asociază soluţia corespunzătoare

$$X_2(t) = e^{\lambda t} v_2 = e^{t}(-1, 1)$$

În final <u>soluţia ”generală”</u> se scrie ca <u>o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute</u> anterior

$$X(t) = \sum_{j=1}^{2} C_j \cdot X_j(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(t) = C_1 \cdot e^{4t}(2, 1) + C_2 \cdot e^{t}(-1, 1)$$

sau scriind vectorii "pe coloană"

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Deci soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale sunt

$$x(t) = C_1 \cdot 2e^{4t} - C_2 \cdot e^{t}$$
$$y(t) = C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{t}$$

Acum ţinând seama de condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$
obţinem sistemul liniar algebric

$$1 = x(0) = C_1 \cdot 2e^{4 \cdot 0} - C_2 \cdot e^{0}$$
$$1 = y(0) = C_1 \cdot e^{4 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{0}$$

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow 2C_1 - C_2 = 2C_1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \ , \ C_2 = -\frac{1}{3}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{t}$$
$$y(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}$$

■

5. Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + e^{t} \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + e^{4t} \end{cases} \quad , \ x(0) = 1 \ , \ y(0) = 2$$

<u>Soluţie</u>.

Este un sistem liniar neomogen.
Matricial se scrie

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

Pas I
Se rezolvă sistemul liniar omogen asociat.

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Obsevăm că este exact sistemul rezolvat deja la problema 3.
Preluăm soluţiile deja obţinute.

$$x(t) = C_1 \cdot 2e^{4t} - C_2 \cdot e^t$$
$$y(t) = C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^t$$

Pas II
Folosim metoda variaţiei constantelor.
Căutăm soluţii ale sistemului liniar neomogen de forma

$$x(t) = C_1(t) \cdot 2e^{4t} - C_2(t) \cdot e^t$$
$$y(t) = C_1(t) \cdot e^{4t} + C_2(t) \cdot e^t$$

Care înlocuite în sistemul neomogen duc la sistemul algebric,
cu $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ ca necunoscute

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \cdot 2e^{4t} - C_2'(t) \cdot e^t \\ C_1'(t) \cdot e^{4t} + C_2'(t) \cdot e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot 2e^{4t} - C_2'(t) \cdot e^t = e^t \\ C_1'(t) \cdot e^{4t} + C_2'(t) \cdot e^t = e^{4t} \end{cases}$$

adunând cele două ecuaţii obţinem

$$C_1'(t) \cdot 3e^{4t} = e^t + e^{4t} \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right)$$

$$C_2'(t) \cdot e^t = e^{4t} - C_1'(t) \cdot e^{4t} \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = e^{3t} - C_1'(t) \cdot e^{3t} = e^{3t} - \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right) \cdot e^{3t}$$

$$C_2'(t) = \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}$$

Calculăm antiderivatele (integrăm)

$$C_1(t) = \int C_1'(t)dt = \int \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right) dt = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)dt = \int \left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right) dt = \frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2$$

Soluţia sistemului neomogen este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1\right) \cdot 2e^{4t} - \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2\right) \cdot e^t$$
$$y(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1\right) \cdot e^{4t} + \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2\right) \cdot e^t$$

Folosim condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

obţinem sistemul liniar algebric

$$
\begin{aligned}
1 = x(0) &= \left(-\frac{1}{9}e^{-3\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 0 + K_1\right)\cdot 2e^{4\cdot 0} - \left(\frac{2}{9}e^{3\cdot 0} - \frac{1}{3}\cdot 0 + K_2\right)\cdot e^0 \\
2 = y(0) &= \left(-\frac{1}{9}e^{-3\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 0 + K_1\right)\cdot e^{4\cdot 0} + \left(\frac{2}{9}e^{3\cdot 0} - \frac{1}{3}\cdot 0 + K_2\right)\cdot e^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{9} + 2K_1 - \frac{2}{9} - K_2 = 1 \\
-\frac{1}{9} + K_1 + \frac{2}{9} + K_2 = 2
\end{aligned}
$$

adunând cele două ecuaţii obţinem

$$
-\frac{3}{9} + 3K_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{10}{9} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{9} + \frac{10}{9} + \frac{2}{9} + K_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{7}{9}
$$

Soluţia problemei Cauchy (sistemul liniar neomogen cu condiţiile iniţiale) este

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}\right)\cdot 2e^{4t} - \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right)\cdot e^t \\
y(t) &= \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}\right)\cdot e^{4t} + \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right)\cdot e^t
\end{aligned}
$$

■