Conf. Univ. Dr.
Dana Constantinescu

Ecuații Diferențiale

Elemente teoretice şi aplicații

Editura Universitaria, 2010

CUPRINS

Prefață.. 7
1. Considerații generale ....
1.1 Introducere 9
1.2 Noțiuni fundamentale 10
1.3 Exerciții propuse 15
2. Ecuații diferențiale de ordinul I
2.1 Ecuații cu variabile separabile 17
2.2 Ecuații liniare 19
2.3 Ecuații cu diferențială totală 21
2.4 Ecuații reductibile la ecuații fundamentale 23
2.5 Exerciții propuse 31
3. Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordinul I
3.1. Suprafața de echilibru a unui lichid în rotație (integrare directă) 33
3.2. Evolutia unei populații (ecuație cu variabile separabile) 34
3.3 Variația presiunii atmosferice în raport cu altitudinea
(ecuație cu variabile separabile) 37
3.4 Căderea liberă (ecuație cu variabile separabile) 38
3.5. Descărcarea unui condensator într-o resistență (ecuație liniară) 39
3.6. Incărcarea unui condensator printr-o rezistență în prezența unei
surse de curent continuu (ecuație liniară) 41
3.7. Transformarea energiei electrice in căldură (ecuație liniară) 42
3.8. Formula fundamentală a curentului alternativ (ecuație liniară) 44
3.9. Oglinda parabolică (ecuație omogenă) 45
3.10. Exerciții propuse 47
4. Ecuații diferențiale de ordin superior
4.1 Ecuații liniare 51
4.1.1 Ecuații liniare cu coeficienți constanți 52
4.1.2 Ecuații liniare cu coeficienți variabili 57
4.2 Ecuații incomplete 59
4.3 Exerciții propuse 61
5. Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I

5.1 Considerații generale 63
5.2 Sisteme liniare omogene cu coeficienți constanți 64
5.3. Sisteme liniare neomogene cu coeficienți constanți 69
5.4 Exerciții propuse 71
6. Elemente de calcul operațional şi aplicații în teoria ecuațiilor diferențiale
6.1 Transformata Laplace 73
6.2 Transformata Laplace inversă 78
6.3 Calcul operațional 81
    6.3.1 Rezolvarea ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți 82
    6.3.2 Rezolvarea sistemelor de ecuațiil liniare cu coeficienți constanți 84
6.4 Exerciții propuse 85
7 Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordin superior
7.1 Oscilații armonice 87
7.2 Mişcarea unui pendul (ecuație liniară) 91
7.3 Calculul perioadei unui circuit oscilant (ecuație liniară) 92
7.4 Oscilații ale unei coloane de lichid (ecuație liniară) 94
7.5 Propagarea căldurii într-o bară (ecuație liniară) 95
7.6 Ecuații de mişcare (ecuații liniare) 96
7.7 Determinarea coeficientului de frecare (ec neliniară) 98
7.8 Determinarea ecuației unei curbe (ecuație neliniară) 100
BIBLIOGRAFIE ………………………………………………… 103

PREFAȚĂ

Materialul de față se doreşte a fi o introducere în studiul ecuațiilor diferențiale şi al aplicațiilor lor. Lucrarea se adresează în primul rând studenților facultăților tehnice, precum si tuturor celor ce doresc să folosească noțiuni fundamentale privind teoria ecuațiilor diferentiale în aplicații practice.

Scopul lucrării este prezentarea clară şi precisă a noțiunilor şi rezultatelor de bază privind rezolvarea analitică a unor tipuri importante de ecuații diferentiale ordinare, descrierea şi exemplificarea principalelor metode de rezolvare a problemelor, precum şi folosirea acestora pentru modelarea matematică a unor probleme practice.

Lucrarea are un pronunțat caracter metodic. Materialul prezentat este organizat in 7 capitole care acoperă cunoştințele aferente temei „Ecuații diferențiale ordinare”, temă predată şi seminarizată la disciplina fundamentală Matematici Speciale, prevăzută la unele facultăți tehnice în noul plan de învățământ, în semestrul II, anul I. Din această perspectivă lucrarea este un eficient suport pentru pregătirea seminariilor, temelor de casă şi examenelor.

Considerații generale asupra ecuațiilor diferențiale ordinare sunt prezentate în Capitolul 1. Principalele tipuri de ecuații diferențiale de ordinul I sunt analizate în Capitolul 2, iar rezolvarea ecuațiilor de ordin superior reprezintă subiectul Capitolului 4. Legătura dintre acestea şi sistemele de ecuații de ordinul I este analizată în Capitolul 5, unde sunt prezentate şi metodele de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare de ordinul I cu coeficienți constanți.Capitolul 6 arată în ce măsură calculul operațional poate fi folosit pentru rezolvarea (analitică) mai simplă a unor categorii speciale de ecuații diferențiale, cum sunt ecuațiile şi sistemele de ecuații liniare cu coeficienți constanți, ce stau la baza studiului sistemelor dinamice.

O atenție deosebită este acordată interpretării noțiunilor introduse şi prezentării unor situații în care ele sunt folosite.

Capitolul 3 şi Capitolul 7 sunt dedicate exclusiv prezentării unor aplicații importante ale ecuațiilor diferențiale ordinare, care reprezintă un element extrem de important în înțelegerea unor fenomene foarte variate (ce apar în fizică, mecanică, inginerie electrică, ecologie, etc.). Descrierea suprafeței de echilibru a unui lichid în rotație, variația presiunii atmosferice în raport cu altitudinea, studiul ecuațiilor de mişcare a corpurilor, a unor fenomene legate de circuitele electrice (descărcarea unui condensator într-o rezistență, încărcarea unui condensator printr-o rezistență în prezența unei surse de curent continuu, calculul perioadei unui circuit oscilant), descrierea propagării căldurii într-o bară, sunt doar cteva dintre aplicațiile analizate. Aceste aplicații au fost alese din perspectiva pregătirii studenților cărora materialul li se adresează cu precădere.

Materialul este conceput într-o manieră accesibilă şi sistematică, în aşa fel încât să poată însoți primii paşi în descoperirea fascinantei lumi a ecuațiilor diferențiale. Demosntrațiile teoremelor sunt reduse la strictul necesar unei prezentări riguroase, fără încarce discursul matematic.

Sperăm ca folosirea acestui material să fie doar începutul studiului în domeniul inepuizabil al ecuațiilor diferențiale şi să trezească interesul pentru matematicile aplicate, îmbinare de rigurozitate, ingeniozitate şi pragmatism.

Mulțumim tuturor celor care, prin sugestii şi completări, au contribuit la realizarea acestei lucrări, în special referenților pentru observațiile şi aprecierile făcute cu ocazia analizei manuscrisului.

CAPITOLUL 1

Considerații generale

1.1 Introducere

Studiul ecuatiilor diferențiale formeazã obiectul unui capitol foarte important al matematicii, atât datoritã rezultatelor teoretice deosebit de interesante cât şi pentru cã ele au nenumãrate aplicații în cele mai diverse domenii.

Ceea ce deosebeşte o ecuație diferențialã de o ecuație algebricã este faptul cã necunoscuta nu este un numãr ci o funcție care satisface o anumiã egalitate şi care trebuie determinată.

Multe fenomene sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale obținute prin metoda cunoscutã sub numele de “metoda diferențialelor”. Aceasta constã în înlocuirea unor relații ce apar între creşterile infinit de mici ale unor cantitãți care variazã în timp prin relații între diferențialele (derivatele) lor.

Spre exemplu viteza instantanee $v(t_0)$ de deplasare a unui mobil care la momentul t a parcurs distanța $s(t)$ este $v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=s'(t_0)$. La rândul sãu accelerația corpului la momentul t_0 este $a(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}=v'(t_0)=s''(t_0)$. In relațiile ce descriu mişcarea viteza se va considera $v(t)=s'(t)$ şi $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Exemplu : Mişcarea unui corp sub acțiunea greutãții sale şi întâmpinând o rezistențã a aerului proporționalã cu viteza sa (acest caz corespunde vitezelor mici) poate fi descrisã cu ajutorul unei ecuații diferențiale.

Se notează $v(t)$ viteza instantanee a corpului la momentul de timp $t > 0$. Rezistența aerului va fi $R(t) = kv(t)$. Legea fundamentală a mecanicii ($\vec{F} = m\vec{a}$) conduce la relația $mg - kv(t) = mv'(t)$ care reprezintă o ecuație diferențială cu necunoscuta $v = v(t)$. Pentru a determina viteza instantanee a corpului trebuie rezolvată această ecuație.

Probleme fundamentale în teoria ecuațiilor (în general) sunt determinarea soluțiilor lor sau aproximarea acestor soluții dacă determinarea analitică nu este posibilă.

Teoria ecuațiilor diferențiale are mai multe ramuri:

- **teoria cantitativă** se ocupă de rezolvarea analitică a ecuațiilor. Sunt precizate tipurile de ecuații ale căror soluții se pot obține analitic şi tehnicile de rezolvare a lor.
- **teoria calitativă** încearcă să deducă proprietățile soluțiilor, chiar dacă expresia lor analitică nu poate fi cunoscută
- **aplicarea metodelelor numerice pentru aproximarea soluțiilor**

Scopul acestui capitol este prezentarea celor mai importante elemente ale teoriei cantitative a ecuațiilor diferențiale.

1.2 Noțiuni fundamentale

Definiția 1. Se numeşte **ecuație diferențială** cu variabila independentă x, şi funcția necunoscută $y = y(x)$ o egalitate de forma

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad (1)$$

unde $F : D \subset R^{n+1} \to R$ este o functie dată, continuă pe domeniul său de definiție, iar y', y'', $y^{(n)}$ sunt derivatele lui y.

Dacă ecuația (1) este scrisă sub forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \qquad (1')$$

se spune că are formă explicită.

Ecuația diferențialã are ordinul "n" dacã derivata de ordin maxim care apare in ecuație este $y^{(n)}$.

Exemple:

1) $x^2 + y^2(x) = 0$ nu este ecuație diferențialã, pentru cã derivatele funcției necunoscute "y" nu apar in ecuatie, dar $x^2 + (y''(x))^2 = 0$ este o ecuație diferențialã de ordinul 2 cu funcția necunoscutã "y" şi variabila independentã "x".

2) $mv'(t) + kv(t) - mg = 0$ este o ecuație diferențialã de ordinul I cu necunoscuta "v" şi variabila independentã "t". Ea descrie mişcarea unui corp sub acțiunea greutãții sale şi întâmpinând o rezistență a aerului proporțională cu viteza sa (funcția necunoscută, v, este viteza corpului).

3) $q'(t) = -\dfrac{q(t)}{C \cdot R}$ este o ecuație diferențialã de ordinul I cu necunoscuta "q" şi variabila independentã "t". Ea descrie procesul de descãrcare al unui condensator de capacitate C într-o rezistenta R (funcția necunoscutã "q" reprezintã sarcina electricã).

4) $x \cdot \ln x - y' + 3y'' - 7xy + 5x^2 y''' = 0$ reprezintã o ecuație diferențialã de ordinul 3 cu necunoscuta "y" şi variabila independentã 'x".

5) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ reprezintã o ecuație diferențialã de ordinul I pentru cã apar notatiile « dx » şi « dy » asociate formal cu derivatele de ordinul I. Necunoscuta problemei trebuie precizatã : dacã folosim notația $y' = dv / dx$ atunci ecuația se scrie sub forma $(x + y + 1) + (x - y^2 + 3)y' = 0$ şi necunoscuta ecuației este y, dar dacã vom considera cã $x' = dx / dy$ ecuația se scrie sub forma $(x + y + 1)x' + (x - y^2 + 3) = 0$ şi necunoscuta ecuației este « x ».

Definiția 2 Se numeşte **soluție a ecuației diferențiale** (1) pe intervalul $I \subset R$ orice funcție $\phi : I \to R$, derivabilã de n ori pe I, care verificã ecuația, adicã pentru orice $x \in I$ are loc egalitatea $F\left(x,\phi(x),\phi'(x),...,\phi^{(n)}(x)\right)=0$.

Existã trei tipuri de solutii:

- **Soluția generalã** a ecuației (1) este soluția care depinde de x şi de n constante arbitrare $C_1, C_2,..., C_n$ (exact atâtea cât este ordinul ecuației), adicã este de forma $y=\phi(x, C_1, C_2,..., C_n)$. Aceasta este *forma explicitã a soluției* pentru cã se precizeazã modul în care funcția necunoscutã y depinde de variabila independentã x

Uneori soluția generalã este prezentatã în *formã implicitã (*integrala generalã a ecuației), adicã $\Omega(x, y, C_1,..., C_n)=0$.

Soluția generalã se poate obține şi sub *formã parametricã* :

$x=f(t, C_1,..., C_n),\ y=g(t, C_1,..., C_n)$

- Orice soluție care se obține din soluția generalã pentru anumite valori particulare ale constantelor se numeşte **soluție particularã.**
- Soluțiile ecuației care nu se pot obține prin acest procedeu din soluția generalã se numesc **soluții singulare**.

In probleme practice, alãturi de ecuația diferențialã trebuie considerate şi condiții inițiale

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,..., y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \qquad (2)$$

Ecuația (1) împreună cu condițiile inițiale (2) formează o **problemã Cauchy**.

Soluția unei probleme Cauchy (1)+(2) se obține impunând condițiile inițiale (2) soluției generale a ecuației (1).

Exemple

1. $y'=3x^2$ este o ecuație diferențialã de ordinul I. cu necunoscuta *y.*

Soluția sa generală este $y: R \to R,\ y(x) = x^3 + C$ deoarece verifica ecuația. Ea depinde de o singură constantă. $y(x) = x^3 + 1$, $y(x) = x^3 - \sqrt{2}$ sunt soluții particulare ale ecuației pentru că au fost obținute din soluția generală pentru $C = 1$, respectiv $C = -\sqrt{2}$. Există o infinitate de soluții particulare ale ecuației.

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ este o ecuație diferențială de ordinul I. cu necunoscuta y si variabila independentă x.

Funcția $y: \left[C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right] \to R,\ y(x) = \sin(x - C)$ reprezintă soluția generală a ecuației.

Funcția $y: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R,\ y(x) = \sin x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C = 0$).

Funcția $y: [0, \pi] \to R,\ y(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C = \frac{\pi}{2}$).

Alte soluții particulare se pot obține în acelaşi mod, pentru fiecare domeniul de definiție fiind altul.

Ecuația admite soluțiile singulare $y_1: R \to R,\ y_1(x) = 1$ şi $y_2: R \to R,\ y_2(x) = -1$.

3. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$ este o ecuație diferențială de ordinul 5.

Soluția sa generală este

$y: R \to R,\ y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

$y(x) = x,\ y(x) = 3 - \sin x$ sunt exemple de soluții particulare.

4. Problema Cauchy $\begin{cases} y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4 = 0 \\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3,\ y'''(0) = 24 \end{cases}$

are soluția $y(x) = 2xe^{2x} + 5\cos x$. Această soluție se obține din soluția generală a ecuației diferențiale, anume $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ determinând constantele din

sistemul $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = 5 \\ y'(0) = 2C_1 + C_2 + C_4 = 2 \\ y''(0) = 4C_1 + 4C_2 - C_3 = 3 \\ y'''(0) = 8C_1 + 12C_2 - C_4 = 24 \end{cases}$

Soluția sistemului este $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 0$ deci soluția problemei Cauchy este $y(x) = 2xe^{2x} + 5\cos x$

5. Soluția generală a ecuației $y \cdot \ln y + (x - \ln y) \cdot y' = 0$, satisface relația

$$2 \cdot x \cdot \ln y = \ln^2 y + C .$$

Aceasta este forma implicită a soluției.

In adevăr, prin derivarea relației anterioare obținem $2 \cdot \ln y + \frac{2x}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln y \cdot \frac{1}{y} \cdot y'$, de unde rezultă $y \cdot \ln y + (x - \ln y) \cdot y' = 0$ adică faptul că funcția y satisface ecuația diferențială şi deci este soluția sa generală (deoarece depinde de o constantă). Determinarea formei sale explicite este mai dificilă.

6. Soluția generală a ecuației $(4x + 3y + 3y^2) + (2xy + x)y' = 0$ satisface relația

$$x^4 + x^3 y^2 + x^3 y = C.$$

Derivând relația anterioară obținem $4x^3 + 3x^2 y^2 + 2x^3 yy' + 3x^2 y + x^2 y' = 0$

adică $x^2 \cdot [(4x + 3y + 3y^2) + (2xy + x)y'] = 0$ ceea ce arată că funcția y

satisface ecuația (variabila independentă x trebuie să şi ia valori nenule deci primul factor al produsului poate fi considerat nenul).

O problemã importantã in teoria ecuațiilor diferențiale este determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale date. Acest lucru este posibil numai pentru un numãr restrâns de ecuații. Unele din aceste cazuri sunt prezentate în paragrafele ce urmeazã.

1.3 Exerciții propuse

1. Să se precizeze dacă funcția $y = y(x)$ este soluție a ecuației diferențiale (sau a problemei Cauchy) în următoarele cazuri. Pentru fiecare soluție să se precizeze domeniul său de definiție.

a). $y^2 + xy - x^2 y' = 0$ $\qquad y(x) = -x/(C + \ln x)$

b). $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ $\qquad y(x) = (x + C)e^{-x^2}$

c). $y' - y = xy^2$ $\qquad y(x) = 1/\left(1 - x + C \cdot e^{-x}\right)$

d). $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $\qquad y(x) = e^x + e^{2x}$

e). $y'' - 5y'6y = 8 \cdot e^x$ $\qquad y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + 4x$

f). $\begin{cases} (2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0 \\ y(1) = 12, \quad y'(1) = 14 \end{cases}$ $\qquad y(x) = (2x+1) \cdot (2x+2)$

2. Să se arate că soluția generală a ecuației $\left(x - y^2 + 3\right)y' + x + y + 1 = 0$, scrisă sub formă implicită este

$$\frac{x^2}{2} + x + 3 \cdot y + x \cdot y - \frac{y^3}{3} = C .$$

3. Să se arate că soluția problemei Cauchy $x + y \cdot y' = 0$, $y(0) = 1$ satisface relația $x^2 + y^2 = 1$. Să se precizeze forma parametrică a soluției.

4. Soluția generală a ecuației $y' = \sqrt{1-y^2}$ **este** $y'':[C-\pi/2, C+\pi/2] \to R$**,** $y(x) = \sin(x-C)$**.**

Să se scrie soluția problemei Cauchy $y' = \sqrt{1-y^2}$ **,** $y(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

Rezolvare: Din $\sin(3\pi/4 - C) = 1/\sqrt{2}$ rezultă $C = \pi/2$ deci soluția este $y:[0,\pi] \to R,\ y(x) = \sin(x-\pi/2) = -\cos x$

CAPITOLUL 2
Ecuații diferențiale de ordinul I

Ecuațiile diferențiale de ordinul I au forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Cel mai adesea ele sunt scrise în formã explicitã $y' = f(x, y)$. Soluția lor generalã depinde de o singurã constantã.
Nu orice ecuație diferențialã de ordinul I poate fi rezolvatã analitic.

Din punctul de vedere al rezolvãrii analitice existã douã categorii importante de ecuații :

- ecuații fundamentale (ecuațiile cu variabile separabile, ecuațiile liniare, ecuații cu diferentiale totale)
- ecuații reductibile la ecuații fundamentale (ecuații omogene si reductibile la ecuații omogene, ecuații care admit factor integrant, ecuații de tip Bernoulli, de tip Riccati, de tip Lagrange, de tip Clairaut etc)

Este foarte importantã cunoaşterea algoritmului de rezolvare a ecuațiilor fundamentale precum şi a metodelor de reducere a celorlalte ecuații la ecuații fundamentale.

2.1 Ecuații cu variabile separabile

Forma generalã a ecuației este

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{3}$$

unde f, g sunt funcții reale date, continue pe domeniul lor de definiție.
Soluțiile ecuației $g(y) = 0$ sunt soluții, de obicei singulare, ale ecuației.
Dacã $g(y) \neq 0$ rezolvarea constã in separarea variabilelor urmatã de integrare.

Metoda de rezolvare:

- se rezolvã ecuația $g(y) = 0$ cu soluțiile $y_1, y_2, ..., y_k$

- se scriu soluțiile singulare ale ecuației
$y(x)=y_1,\ y(x)=y_2, ..., y(x)=y_k$.
Domeniul lor de definiție este domeniul de definiție al funcției *f*.
- se scrie ecuația sub forma $\dfrac{y'}{g(y)}=f(x)$ (ceea ce este posibil pentru $g(y)\neq 0$) şi se obține integrala generalã a ecuației : $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$, adicã forma implicitã a soluției.
- din integrala generalã se calculeazã (dacã este posibil) y şi se obține forma explicitã a soluției.

Observație : Soluția particularã a ecuației (3) care îndeplineşte condiția inițialã $y(x_0)=y_0$ este datã de $\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{g(s)}=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$. Ea se poate obține din soluția explicitã impunând condiția inițială.

O formã particularã a ecuației cu variabile separabile este $y'=f(x)$. Soluția generalã a acestei ecuații este $y(x)=\int f(x)dx$

Exemple : Sã se rezolve

1. $y'=x^2+\sin x$

Soluția generalã este $y(x)=\int\left(x^2+\sin x\right)dx=\dfrac{x^3}{3}-\cos x+C$

2. $y'=\dfrac{x}{x^2+1}$

Soluția generalã este $y(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

3. $y'=-\dfrac{y}{x}$

In acest caz $f(x)=-\frac{1}{x}$ şi $g(y)=y$, deci ecuaţia $g(y)=0$ are soluţia $y=0$ şi funcţia $y_s : R-\{0\}\to R,\ y_s(x)=0$ este soluţie singularã a ecuaţiei.

Dacã $y\neq 0$ ecuaţia devine $\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x}$ şi integrala ei generalã este $\int\frac{dy}{y}=\int -\frac{1}{x}dx$.

Rezultã $\ln|y|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+C_1\overset{notatie}{=}\ln\left|\frac{1}{x}\right|+\ln C=\ln C\left|\frac{1}{x}\right|$, unde $C>0$ este o constantă arbitrară. Rezultă $y=\pm\frac{C}{x},\ C>0$. In acest caz soluţia generală se scrie sub forma $y:R-\{0\}\to R,\ y(x)=\frac{C}{x},\ C\neq 0$.

Inlocuind $C=0$ în soluţia generală se obţine soluţia singulară y_s. Aceasta nu este însă o soluţie particulară deoarece valoarea $C=0$ nu este acceptabilă în cadrul soluţiei generale.

2.2 Ecuaţii liniare

Forma generalã a ecuaţiei liniare este

$$y'=P(x)\cdot y+Q(x) \qquad (4)$$

unde $P,Q:I\to R$ sunt funcţii date, continue pe domeniul de definiţie. Aceastã ecuaţie se rezolvã prin metoda variaţiei constantei.

Metoda de rezolvare (metoda variaţiei constantei)

- se rezolvã ecuaţia omogenã $y'=P(x)\cdot y$ care este o ecuaţie cu variabile separabile şi se obţine soluţia nenulã $y=C\cdot e^{\int_a^x P(x)dx}\overset{notatie}{=}C\cdot f(x)$

- se considerã constanta C ca fiind funcție de x, adicã se scrie $y(x)=C(x)\cdot f(x)$
- se calculeazã $y'(x)=C'(x)f(x)+C(x)f'(x)$ şi se introduce in ecuația (4) ; termenii care conțin pe $C(x)$ se reduc şi se obține o ecuație mai simplã de forma $C'(x)=g(x)$.
- se rezolvã ecuația $C'(x)=g(x)$ şi se obține soluția $C(x)=\int g(x)dx+K$
- se introduce expresia lui $C(x)$ în $y(x)=C(x)f(x)$ şi se obține forma explicitã a soluției ecuației (4).

Observație : Forma explicitã a soluției ecuației (4) , pentru x_0 fixat, este

$$y(x)=\left[K+\int_{x_0}^{x}\left(Q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}P(t)dt}\right)ds\right]\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}.$$

Aceastã expresie se obține folosind algoritmul anterior dar e dificil de memorat şi de aceea se recomandã folosirea algoritmului pentru rezolvarea fiecãrei ecuații.

Exemplu : Sã se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y'=y\cdot ctgx+2x\cdot\sin x \\ y(\pi/2)=a \end{cases}$

Funcția $ctgx$ nu este definitã in punctele $n\pi,\ n\in N$. Din cauza condiției inițiale se va cãuta soluția generalã a ecuației pe intervalul $(0.\pi)$.

Ecuația omogenã $y'=y\cdot ctgx$ are integrala generalã $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Rezultã $\ln|y|=\ln|\sin x|+C_1=\ln(C|\sin x|)$ care dã soluția $y(x)=C\sin x$

Se aplicã variația constantei, adicã se considerã $y(x)=C(x)\sin x$.
Introducând $y'(x)=C'(x)\sin x+C(x)\cos x$ în ecuația neomogenã obținem
$C'(x)\sin x+C(x)\cos x=C(x)\sin x\dfrac{\cos x}{\sin x}+2x\sin x$. Termenii conținând factorul $C(x)$ se reduc şi se obține ecuația $C'(x)=2x$ cu soluția $C(x)=x^2+K$.
Introducând aceastã expresie în forma lui $y(x)$ obținem soluția generalã a ecuației, anume $y:(0,\pi)\to R,\ y(x)=\left(x^2+K\right)\sin x$ unde $K\in R$ este o constantã arbitrarã.
Din condiția $y(\pi/2)=a$ rezultã $\left(\dfrac{\pi^2}{4}+K\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a$, adicã $K=a-\dfrac{\pi^2}{4}$. Deci soluția problemei Cauchy este
$y:(0,\pi)\to R,\ y(x)=\left(x^2+a-\dfrac{\pi^2}{4}\right)\sin x$.

2.3 Ecuații cu diferențială totală

Forma generalã a ecuației este

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (5)$$

unde P,Q sunt funcții date, de clasã C^2 pe domeniul $D\subset R^2$ şi satisfac relația $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ pentru orice $(x,y)\in D$.
Rezolvarea ecuației se bazeazã pe faptul cã existã funcții de forma

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\,dt$$

astfel încât $dU_{(x,y)}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Spunem în acest caz cã ecuația are diferențialã totalã. Ea se scrie sub forma $dU_{(x,y)}=0$, deci soluția ecuației (5) va fi datã în forma implicitã de relația $U(x,y)=C$.

Metodã de rezolvare

- se identificã în ecuație $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ şi se verificã egalitatea $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$
- se determinã funcția U
- se scrie soluția ecuației sub formã implicitã $U(x,y)=C$. Dacã este posibil, din aceastã egalitate se aflã y în funcție de x şi se obține forma explicitã a soluției.

Exemplu : Sã se determine soluția generalã a ecuației $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.

In acest caz $P(x,y)=x+y+1$ şi $Q(x,y)=x-y^2+3$ şi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=1$$

$$U(x,y)=\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt=\int_0^x(t+1)dt+\int_0^y\left(x-t^2+3\right)dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}$$

Soluția generalã a ecuației este datã sub formã implicitã de relația

$$\frac{x^2}{2}+x+3y+xy-\frac{y^3}{3}=C.$$

Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic în raport cu necunoscuta y, deci nu se poate preciza forma explicită a soluției.

2.4 Ecuații reductibile la ecuații fundamentale

Tehnica generală de rezolvare a acestui tip de ecuații este următoarea :
- se reduce ecuația la o ecuație fundamentală
- se rezolvă ecuația fundamentală
- se scrie soluția ecuației inițiale folosind soluția celei fundamentale

2.4.1 Ecuatii omogene

Forma generală a unei ecuații omogene este $y' = f\left(y/x\right)$

Prin schimbarea de variabilă $z\left(x\right) = \dfrac{y\left(x\right)}{x}$ se obține o ecuație cu variabile separabile.

Exemple : Să se determine soluția generală a ecuației $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Pentru $x \neq 0$ ecuația se scrie $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$. Cu schimbarea de variabilă $z\left(x\right) = \dfrac{y\left(x\right)}{x}$, adică $y\left(x\right) = x \cdot z\left(x\right)$, ecuația devine $z\left(x\right) + xz'\left(x\right) = z\left(x\right) + \sqrt{1 + z^2\left(x\right)}$, care este o ecuație cu variabile separabile, anume $z' = \dfrac{1}{x}\sqrt{1 + z^2}$. Integrala generală a ecuației este $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{1}{x} dx$, adică $\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \ln|x| + C_1 = \ln\left(C|x|\right)$.

Rezultă $z + \sqrt{1 + z^2} = Cx$, adică $z\left(x\right) = \dfrac{C^2x^2 - 1}{2C|x|}$. Soluția generală a ecuației este

$$y : R - \{0\} \to R, \quad y(x) = x\frac{C^2x^2 - 1}{2C\,|\,x\,|}$$

2.4.2 Ecuații reductibile la ecuatii omogene sau cu variabile separabile

Ecuațiile având forma generalã $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ pot fi reduse la ecuații omogene sau cu variabile separabile astfel :

- dacã $a/a' \neq b/b'$ se rezolvã sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ care are soluția (x_0, y_0). Prin schimbarea de variabile $x = u + x_0,\ \ y = v + y_0$ se obține o ecuație omogenã cu variabila independentã u şi funcția necunoscutã v.
- dacã $a/a' = b/b'$ se foloseşte substituția $z = ax + by$ şi ecuația se transformã într-o ecuație cu variabile separabile.

Exemple: 1. $(2x + 3y - 1) - (x - y - 3)y' = 0$

Ecuația se scrie sub forma $y' = \dfrac{2x + 3y - 1}{x - y - 3}$ deoarece $y = x - 3$ nu este soluție a ecuației. Sistemul $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ are solutia unicã $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Se face substituția $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 1 \end{cases}$ şi se obține ecuația omogenã

$(2u + 3v) + (v - u)v' = 0$ cu funcția necunoscutã v. Notând $z = \dfrac{v}{u}$, adicã $v = zu$ ecuația se reduce la ecuația cu variabile separabile

$z' = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{z^2 + 2z + 2}{1 - z}$. Integrala generalã a acestei ecuații este

$\int \frac{1-z}{z^2+2z+2}dz = \int \frac{1}{u}du$. Calculând cele două integrale obținem
$\frac{\ln\left(z^2+2z+2\right)}{2} - 2arctg\left(z+1\right) = \ln u + C$.

Tinând cont că $z = \frac{v}{u} = \frac{y+1}{x-2}$ se obține soluția generală sub formă implicită

$$\ln\left(\left(y+1\right)^2 + 2\left(x-2\right)\left(y+1\right) + 2\left(x-2\right)^2\right) - 4arctg\frac{x+y-1}{x-2} = 0 .$$

Forma explicită a soluției nu se poate determina.

2. $$\left(4x+6y+4\right) - 3\left(6x+9y-2\right)y' = 0$$

Ecuația se scrie sub forma $y' = \frac{4x+6y+4}{3\left(6x+9y-2\right)}$ .Deoarece

$\frac{a}{a'} = \frac{4}{18} = \frac{b}{b'} = \frac{6}{27}$ se va folosi substituția $2x+3y = z$. Din $y = \frac{z-2x}{3}$
rezultă $y' = \frac{z'-2}{3}$. Ecuația devine $\frac{z'-2}{3} = \frac{2z+4}{9z-6}$ adică $z' = \frac{8z}{3z-2}$.
Aceasta este o ecuație cu variabile separabile care se poate scrie sub forma $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4z}\right)z' = 1$.

Integrala generală a acestei ecuații conduce la relația $\frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\ln z = x + C$.
Tinând cont de expresia lui z se obține soluția generală a ecuației inițiale, soluție scrisă sub formă implicită :
$3\left(2x+3y\right) - \ln\left(2x+3y\right)^2 - 8x = C$.
Nici în acest caz nu se poate preciza forma explicită a soluției.

2.4.3 Ecuații ce admit factor integrant

Au forma generala $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ cu $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ dar pentru care existã funcția $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, numitã factor integrant, astfel încât $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

Dacã factorul integrant $\mu(x,y)$ poate fi determinat, atunci ecuația $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y) = 0$ este o ecuație cu diferențialã totalã, echivalentã cu cea inițialã.

Nu toate ecuațiile au factor integrant, existã doar câteva cazuri importante dintre care menționăm:

- dacã $\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q}$ depinde doar de x atunci existã factor integrant ce depinde doar de x si $\mu = \mu(x)$ satisface ecuația

$$\mu' = \mu \frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q} \qquad (4.3.1)$$

- dacã $\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P}$ depinde doar de y atunci atunci existã factor integrant ce depinde doar de y si $\mu = \mu(y)$ satisface ec.

$$\mu' = \mu \frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P} \qquad (4.3.2)$$

Pentru rezolvarea ecuațiilor cu factor integrant se parcurg urmãtoarele etape :

- se determinã factorul integrant rezolvând ecuațiile diferențiale (4.3.1) sau (4.3.2)
- se scrie ecuația cu diferențiale totale corespunzãtoare
- se rezolvã ecuația cu diferențiale totale (cu necunoscuta $y = y(x)$) şi se obține astfel soluția ecuației inițiale.

Exemplu : $\left(4x+3y+3y^2\right)dx+\left(2xy+x\right)dy=0$.

In acest caz $P(x,y)=4x+3y+3y^2$ şi $Q(x,y)=2xy+x$.

Rezultã cã $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6y+3$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y+1$. Ecuația nu are diferențialã totalã deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Totuşi $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{2}{x}$ depinde numai de x, deci se poate alege un factor integrant de forma $\mu=\mu(x)$. El va satisface ecuația $\mu'=\mu\cdot\dfrac{2}{x}$ care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția $\mu(x)=x^2$. Din înmulțirea cu x^2 a ecuației inițiale se obține ecuația cu diferențialã totalã

$\left(4x^3+3x^2y^2+3x^2y\right)dx+\left(2x^2y+x^3\right)dy=0$.

- Funcția $U(x,y)=\int_0^x 4t^3dt+\int_0^y\left(2x^2t+x^3\right)dt=x^4+x^2y^2+x^3y$.

  Soluția ecuației, scrisã sub formã implicitã va fi deci $x^4+x^2y^2+x^3y=C$. Ea este şi soluția ecuației inițiale.

2.4.4 Ecuatii de tip Bernoulli

Forma generalã este $y'=P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^{\alpha}$, unde $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$ şi $P,Q:I\to R$ sunt funcții date, continue pe *I*.

Pentru $a>0$ ecuația are soluția singulară $y:I\to R$, $y(x)=0$.

Prin schimbarea de funcție $z=y^{1-\alpha}$ se obține o ecuație liniară. Dacă soluția ecuației liniare este z_g atunci soluția ecuației inițiale este $y=z_g^{\ \alpha-1}$.

Exemplu : $y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$.

In acest caz $\alpha = 1/2$. Se foloseşte substituţia $z = y^{1-1/2} = y^{1/2}$. Rezultă $y = z^2$ şi $y' = 2 \cdot z \cdot z'$.

Ecuaţia devine $2 \cdot z \cdot z' = \frac{4}{x} z^2 + xz$, adică $z\left(2z' - \frac{4}{x} z - x\right) = 0$.

Din soluţia $z = 0$ rezultă soluţia singulară $y = 0$.

Ecuaţia liniară $z' = \frac{2}{x} z + \frac{x}{2}$ are soluţia $z(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + K\right) \cdot x^2$ care conduce la $y(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + K\right)^2 \cdot x^4$.

2.4.5. Ecuatii de tip Ricatti

Forma generala este $y' + P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x) = 0$

Aceste ecuaţii se pot rezolva numai dacă se cunoaşte măcar o soluţie particulară a lor :

- dacă se cunoaşte o soluţie $y_1(x)$, prin transformarea $y = y_1 + 1/z$ se obţine o ecuaţie liniară şi neomogenă ;
- dacă se cunosc două soluţii y_1 şi y_2, prin schimbare de variabilă $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ se obţine o ecuaţie liniară şi omogenă ;
- dacă se cunosc trei soluţii y_1, y_2, y_3 atunci soluţia se obţine direct din relaţia

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C .$$

Exemplu : Să se rezolve ecuaţia $y' + \frac{1}{x^3 - 1} y^2 - \frac{x^2}{x^3 - 1} y - \frac{2x}{x^3 - 1} = 0$

a) ştiind că admite soluţia $y_1 = -x^2$;

b) ştiind cã admite soluţiile $y_1(x) = -x^2$ şi $y_2(x) = -1/x$;

c) ştiind cã admite trei soluţii $y_1(x) = -x^2$, $y_2(x) = -1/x$ şi $y_3(x) = x+1$.

a) Dacã se cunoaşte numai soluţia y_1 se face schimbarea de variabilã $y = \frac{1}{z} - x^2$ adicã $y' = -\frac{1}{z^2}z' - 2x$.

Se obţine ecuaţia $\left(x^3-1\right)\left(-\frac{1}{z^2}z' - 2x\right) + \left(\frac{1}{z} - x^2\right)^2 - x^2\left(\frac{1}{z} - x^2\right) - 2x = 0$ din care, dupã efectuarea calculelor rezultã ecuaţia liniarã $z' + \frac{3x^2}{x^3-1}z - \frac{1}{x^3-1} = 0$ cu soluţia $z = \frac{k+x}{x^3-1}$. Rezultã $y = \frac{-1-kx^2}{x+k}$.

b) Dacã se cunosc douã soluţii se face substituţia $z = \frac{y+x^2}{y+1/x}$ adicã

$$y = \frac{z-x^3}{x(1-z)} \quad \text{şi} \quad y' = \frac{\left(z'-3x^2\right)x(1-z) - \left(z-x^3\right)(1-z-xz')}{x^2(1-z)^2}.$$

Introducând aceste expresii în ecuaţia diferenţialã obţinem (dupã calcule) ecuaţia liniarã $z' = \frac{z}{x}$ care are soluţia $z = cx$. Rezultã $y = \frac{c-x^2}{1-cx}$.

Observãm ca soluţia obţinutã coincide cu cea de la a) dacã considerãm $c = -1/k$.

c) dacã se cunosc y_1, y_2, y_3, soluţia generalã se obţine direct din formula $\frac{y-y_1}{y-y_2} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = k$ de unde rezultã $y = \frac{x^2-k}{kx-1}$.

2.4.6. Ecuatii de tip Lagrange

Forma generalã este $y = x \cdot A(y') + B(y')$, unde $A(y') \neq y'$

Se deriveazã ecuația şi se noteazã $y' = p$.

Se obține o ecuație liniarã cu funcția necunoscutã x şi variabila independentã p.

Aceastã ecuație are solutia de forma

$x = x(p)$ iar soluția generalã a ecuației Lagrange se dã în formã parametricã $\begin{cases} x = x(p) \\ y = x(p)A(p) + B(p) \end{cases}$

Exemplu : Sã se rezolve ecuația $y = x \cdot (y')^2 - y'$.

Prin derivarea ecuației se obține $y' = (y')^2 + 2xy'y'' - y''$. Se noteazã $y' = p$ şi se ajunge la ecuația $p - p^2 = (2px - 1)p'$ în care p este funcție de x. Dacã se considerã x ca funcție de p (se inverseazã aplicația p) şi se ține cont de faptul cã $x' = 1/p'$ (din formula de derivare a funcției inverse) se obține ecuația liniarã $x' + \dfrac{2x}{p-1} - \dfrac{1}{p(p-1)} = 0$ pentru $p(p-1) \neq 0$.

Rezultã $x = (C + \ln p)/(p-1)$ şi soluția ecuației este datã parametric prin $x = (C + \ln p)/(p-1), \quad y = p^2(C + \ln p)/(p-1) - p$.

Pentru $p = 0$ şi $p = 1$ se obțin douã soluții singulare : $y = K$ şi $y = x + L$.

Înlocuind aceste funcții în ecuația inițialã se obține $K = 0$, respectiv $L = -1$. Deci soluțiile particulare vor fi $y = 0$ şi $y = x - 1$.

2.4.7. Ecuatii de tip Clairaut

Ecuațiile de tip Clairaut au forma generalã $y = xy' + B(y')$.

Notând $y' = p$ ecuația devine $y = xp + B(p)$. Prin derivarea sa se obține ecuația $p' \cdot (x + B'(p)) = 0$.

Dacã $p'(x) = 0$ se obține soluția (generalã) $y(x) = Cx + B(C)$

Din egalitatea $x + B'(p) = 0$ se obține soluția singularã $\begin{cases} x = -B'(p) \\ y = -B'(p)p + B(p) \end{cases}$ scrisã sub formã parametricã.

Exemplu : $y = xy' - (y')^2$

Soluția generalã este $y = Cx - C^2$ şi o soluție particularã este datã parametric de $\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases}$.

Soluția singulară scrisă sub formă explicită este $y = x \cdot \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$

2.5 Exerciții propuse

Sã se rezolve urmãtoarele ecuații diferențiale sau probleme Cauchy:

1. $y' - y/x = 0$ **R :** $y = Cx + x^2$

2. $y' - 2y/x = x^3$ **R :** $y = x^4/6 + C/x^2$

3. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$ **R :** $y = e^x/x - \left(ab - e^a\right)/x$

4 $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **R :** $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{4(1-x)}}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$

5. $y'\cos^2 x + y = tgx, \quad y(0) = 0$ **R :** $y = x/\cos x$ **,** $\quad x \in [0, \pi/2)$

6. $xy' - y = y^3$ **R :** $y = Cx/\sqrt{1 - C^2x^2}$

7. $(x - y)y - x^2y' = 0$ **R :** $y = 1/(\ln|x| + C)$

8. $(1 - x^2)y' + xy = ax$ **R :** $y = a + C\sqrt{x^2 - 1}$

9. $xy' - 2y = x^3/2$ **R :** $y = x^3/2 + Kx^2$

10. $y' - 2xy = x^3$ **R :** $y = (x^2 - 1)/2 + Ce^{-x^2}$

11. $xy' - y = \ln x$ **R :** $y = -\ln x - 1/(2x) + Cx$

12. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ **R :** $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 = C$

13. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ **R :** $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$

14. $xy' = y, \quad y(1) = 0$ **R :** $y = 0$

15. $xy' = y, \quad y(1) = 1$ **R :** $y = x$

CAPITOLUL 3
Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordinul I

3.1 Suprafața de echilibru a unui lichid în rotație (integrare directă)

Problema: Un tub vertical cilindric cu raza *r* se roteşte rapid în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine ecuația intersecției suprafeței de rotație a lichidului cu un plan care conține axa tubului.

Variabila independentă, *x*, indică distanța unui punct față de axa de rotație (axa tubului). Funcția necunoscută, $y = y(x)$, unde $y:[-r,r] \to R$ reprezintă înălțimea lichidului în punctele aflate la distanța *x* de axa cilindrului şi descrie intersecția suprafeței de rotație a lichidului cu un plan ce conține axa tubului.

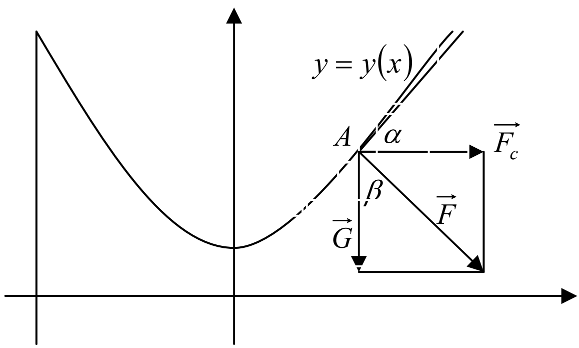

Figura 1 Suprafața de echilibru a unui lichid în rotație

Sub acțiunea forței de inerție lichidul se ridică spre pereții tubului.

Asupra punctului de masa m situate la distanța x de axă acționează două forțe: greutatea $\vec{G} = -mg \cdot \vec{j}$ şi forța centrifugă $\vec{F}_c = m\omega^2 x \cdot \vec{i}$.
Deoarece viteza de rotație e constantă suprafața lichidului e stabilă şi forța rezultantă $\vec{F}$ este perpendiculară pe planul tangent la suprafața lichidului, adică unghiurile α şi β sunt egale. Rezultă că $tg\alpha = tg\beta$ adică

$$y'(x) = \frac{\omega^2}{g} \cdot x$$

Ceea ce reprezintă ecuație diferențială ce descrie curbă de rotație.

Prin integrare directă se obține $y(x) = \int \frac{\omega^2}{g} x dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$.

Deci curba de rotație este o parabolă.
Constanta C se determină folosind faptul că volumul lichidului este constant. Dacă înainte de începerea rotației înălțimea lichidului era h atunci conservarea volumului se scrie astfel

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \int_0^r y^2(x) dx = \pi \left(r \cdot C^2 + \frac{2}{3} kr^3 \cdot C + \frac{k^2 r^5}{5} \right)$$

unde $k = \frac{\omega^2}{2g}$, ceea ce reprezintă o ecuație cu necunoscuta C.

3.2. Evolutia unei populații (variabile separabile)

a. Evoluția unei populați într-un mediu cu resurse nelimitate
Problemă: Să se descrie evoluția unei populații a cărei creştere în fiecare moment este proporțională cu valoarea sa în acel moment.

Variabila independentă este timpul t iar funcția necunoscută este $y : [0, +\infty) \to R$ Ea caracterizează mărimea populației ($y(t)$ reprezintă numărul de indivizi, densitatea unei culturi bacteriene etc la momentu de timp t).

In timpul Δt populația se modifică cu $\Delta y = k \cdot y(t) \cdot \Delta t$. Variația sa instantanee este $\Delta y / \Delta t$ deci se poate scrie

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t)$$

ceea ce reprezintă ecuația diferențială ce descrie evoluția populației. Ea este o ecuație cu variabile separabile.

Soluția singulară $y_s : [0,+\infty) \to R$, $y_s(t) = 0$ care nu convine problemei deoarece în această situație populația nu există.

Soluția generală a ecuației este $y(t) = C \cdot e^{kt}$.

Aceasta este faimoasa lege a lui Malthus care a prevăut că populația Terrei va creşte exponențial în timp ce resursele sale cresc in progresie geometrică, deci ele vor deveni insuficiente pentru toti oamenii şi războaiele sunt necesare pentru reglementarea echilibrului.

Problemă Dacă populația unei țări s-a dublat în 50 de ani, peste cât timp se va tripla, dacă viteza de creştere este proporțională cu mărimea sa?

Tinând cont că $y(t) = Ce^{kt}$ şi că $y(50) = 2y(0)$ rezultă $Ce^{50k} = 2C$, deci $k = \frac{\ln 2}{50}$.

Triplarea populației înseamnă $y(t) = 3y(0)$ ceea ce conduce la $e^{kt} = 3$, adică $t = \frac{\ln 3}{k} = \frac{50 \cdot \ln 3}{\ln 2} \approx 79$.

Deci populația se va tripla dupa 79 de ani.

Problemă: Intr-o colonie de microbi care se înmulțesc cu o viteză proporțională cu numărul lor se constată că numărul de microbi s-a dublat în 5 ore. Ce se va întâmpla după 10 ore?

Din legea de evoluție $y(t) = C \cdot e^{kt}$ şi condiția $y(5) = 2y(0)$ rezultă $k = \frac{\ln 2}{5}$. Atunci $y(10) = Ce^{2\ln 2} = 4C$ arată că numărul de microbi a crescut de 4 ori în 10 ore.

b. Evoluția unei populații într-un mediu cu resurse limitate
Problemă: Să se descrie evoluția unei populații într-un mediu cu resurse limitate în care populația maximă ce poate trăi are mărimea *L*, dacă mărimea ei inițială este P_0
Folosind notațiile din problema anterioară obținem problema Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t)\cdot(L - y(t)) \\ y(0) = P_0 \end{cases}$$

Ecuația diferențială, numită şi ecuația logistică, arată că o populație va creşte (adică $y'(t) > 0$) doar dacă ea nu a atins nivelul maxim permis de mediu. Dacă mărimea ei este mai mare decât acest nivel ea va trebui să scadă până la limita acceptabilă.
Ecuația are variabile separabile.
Soluțile singulare $y_{s1}, y_{s2} : [0,\infty) \to R$, $y_{s1}(t) = 0$, respectiv $y_{s2}(t) = L$ descriu situația în care populația nu există (adică $P_0 = 0$), respective siuația când populația inițială este la nivelul maxim admis de mediu, adică $P_0 = L$ şi rămane la acest nivel.
Scrisă sub forma $\dfrac{y'(t)}{y(t)(L - y(t))} = k$ ecuația poate fi integrată şi conduce la $\ln\left(\dfrac{y(t)}{L - y(t)}\right) = Lkt + C$, adică $\dfrac{y(t)}{L - y(t)} = Ce^{Lkt}$. Soluția gnerală este deci $y(t) = L\dfrac{Ce^{Lkt}}{1 + Ce^{Lkt}}$. Determinarea constantei C se face folosind condiția inițială.
Din $y(0) = P_0 = \dfrac{LC}{1 + C}$ rezultă $C = \dfrac{P_0}{1 - P_0}$ deci soluția problemei este

$$y(t) = \frac{L \cdot P_0 \cdot e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0 e^{Lkt}}$$

Din expresia analitică a soluției se observă că $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = L$, deci populația tinde să atingă valoarea maximă admisă.

3.3. Variația presiunii atmosferice în raport cu altitudinea (ecuație cu variabile separabile)

Problemă: Să se determine presiunea atmosferică $p = p(h)$ a unei mase volumice de aer ρ la temperature T în raport de înălțimea h măsurată de la nivelul mării, daca presiunea la nivelul mării este $p(0) = p_0$.

Variabila independentă este altitudinea *h* iar funcția necunoscută este presiunea atmosferică $p = p(h)$.

Ecuația fundamentală a hidrostaticii, scrisă pentru acest caz, este $p' + \rho g = 0$.

Dacă vom considera aerul la un gaz perfect obținem relația $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$, unde *n* este numărul de moli de aer ce ocupă volumul *v*, *R* este o constantă. Rezultă că $\rho = \frac{m}{v} = \frac{m \cdot p}{n \cdot R \cdot T} = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}$, unde *M* este masa molară a aerului. In acest caz ecuația ce descrie presiunea aerului devine $p' + \frac{M \cdot g}{R \cdot T} p = 0$. Problema Cauchy atașată este

$$\begin{cases} p'(h) + \dfrac{M \cdot g}{R \cdot T(h)} p(h) = 0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}.$$

Cazul I Dacă temperatura este constantă, ecuația se scrie $p' = -kp$, unde $k = \frac{M \cdot g}{R \cdot T}$.

In acest caz ecuația are variabile separabile. Soluția singulară $p(h) = 0$ nu convine problemei și din soluția generală $p(h) = C \cdot e^{-kh}$ deducem, impunând condiția inițială că soluția problemei Cauchy este $p(h) = p_0 \cdot e^{-kh}$. Rezultă deci că presiunea scade exponențial în raport cu altitudinea.

Cazul II: Dacă temperatura nu este constantă dar aerul respectă legea transformărilor adiabatice $p \cdot v^{\gamma} = K$, cu $\gamma \neq 1$ dat, atunci $v = \left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma}$, din relația $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$ se obține $R \cdot T = \frac{p}{n} v = \frac{p}{n}\left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma} = \frac{K^{1/\gamma} \cdot p^{1-1/\gamma}}{n}$ şi problema Cauchy devine

$$\begin{cases} p'(h) = -\frac{m \cdot g}{K^{1/\gamma}} p^{1/\gamma}(h) \overset{notatie}{=} -k_1 \cdot p^{1/\gamma}(h) \\ p(0) = p_0 \end{cases}.$$

Integrând ecuația $p^{-1/\gamma}(h) \cdot p'(h) = -k_1$ obținem

$$p^{1-1/\gamma}(h) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C), \quad \text{adică} \quad p(h) = \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Din condiția inițială rezultă $C = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0^{(\gamma-1)/\gamma}$, deci

$$p(h) = \left[\left(p_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} k_1 h\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

ceea ce arată că presiunea scade atunci când creşte altitudinea şi altitudinea maximă la care există atmosferă este $h_{\max} = \frac{\gamma \cdot p_0^{(\gamma-1)/\gamma}}{(\gamma - 1)}$ care se obține din relația $p(h_{\max}) = 0$.

3.4. Căderea liberă (cu variabile separabile)

Problemă: Să se determine viteza unui corp în mişcare verticală sub acțiunea greutății sale şi a rezistenței aerului, dacă viteza de pornire este v_0 .

Variabila independentă este timpul si funcția necunoscută este viteza $v = v(t)$. Condiția inițială este $v(0) = v_0$. Rezistența aerului este *R=R(t)* şi accelerația corpului este $a(t) = v'(t)$.

Legea fundamentală a dinamicii se scrie sub forma $m \cdot g - R(t) = mv'$

Cazul I: Dacă rezistența aerului este proporțională cu viteza corpului, adică $R(t) = kv(t)$**,** ecuația devine $mg - kv(t) = mv'(t)$. Notând $k_1 = m/k$ obținem problema Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = g - k_1 v(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}.$$

Ecuația diferențială, cu variabile separabile, are soluția singulară $v(t) = g/k_1$. Pentru determinarea soluției generale se scrie ecuația sub forma $\frac{v'(t)}{g - k_1 v(t)} = 1$, deci $\int \frac{v'(t)}{g - k_1 v(t)} = t + C$, adică $-\frac{1}{k_1}\ln(g - k_1 v(t)) = t + C$. De aici rezultă $v(t) = \frac{g}{k_1}\left(1 - C_1 e^{-k_1 t}\right)$. Din condiția inițială $v_0 = \frac{g}{k_1}(1 - C_1)$ rezultă $C_1 = 1 - \frac{k_1 v_0}{g}$.

In această situație viteza creşte odată cu trecerea timpului şi tinde să atingă valoarea maximă posibilă, $v_{\max} = g/k_1$.

Cazul II Dacă rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei (ceea ca se întâmplă când vitezele de mişcare sunt mari) atunci $R(t) = kv^2(t)$ şi problema Cauchy devine

$$\begin{cases} v' = g\left(1 - \alpha^2 v^2(t)\right) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

unde $\alpha^2 = k/m$. Ecuația diferențială cu variabile separabile are soluția singulară $v(t) = 1/\alpha^2$ care este o funcție constantă şi corespunde cazului când $v_0 = 1/\alpha^2$.

Soluția generală, obținută prin integrarea ecuației $\frac{v'(t)}{1-\alpha^2 v^2(t)} = g$, este dată de egalitatea $\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha v(t)}{1-\alpha v(t)}\right) = gt + C$. Rezultă $v(t) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{2\alpha\cdot\cdot(g\cdot t+C)}-1}{e^{2\alpha\cdot\cdot(g\cdot t+C)}+1}$. Valoarea lui C se determină din condițiile inițiale.

Din analiza expresiei lui v se poate deduce că viteza creşte pe măsură ce timpul trece şi tinde să atingă valoarea maximă admisă $v_{\max} = 1/\alpha = \sqrt{m/k}$.

3.5. Descărcarea unui condensator într-o resistență (liniară)

Fenomenul este important pentru cã apare în circuitele folosite la transmisiunile radio, de televiziune, la radare etc.

Problema : Se considerã un circuit electric format dintr-un condensator cu capacitatea C şi o rezistență R. Se cere intensitatea curentului, $i(t)$ şi diferența de potențial $v(t)$ la bornele condensatorului în funcție de momentul t la care se face mãsurarea dacã sarcina inițialã este Q.

Rezolvare : Considerãm funcțiile $i,q,v:[0,+\infty)\to R$ cate indică intensitatea, sarcina electricã şi diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de timpul *t*.

Intre ele existã relația $q(t) = Cv(t)$.

Intensitatea curentului electric la descãrcare este $i(t) = -q'(t)$ şi la bornele rezistenței ea satisface relația $i = \frac{v}{R}$ (legea lui Ohm).

Relațiile anterioare aratã cã acest circuit este caracterizat de problema Cauchy

$$\begin{cases} q'(t) = -\dfrac{q(t)}{C \cdot R} \\ q(0) = Q \end{cases} \qquad \text{(CR)}$$

în care $q = q(t)$ este funcția necunoscută iar C şi R sunt constante date în problemã.

Ecuația diferențialã poate fi consideratã ca o ecuație cu variabile separabile sau ca o ecuație liniarã şi omogenã de ordinul I. Soluția problemei Cauchy este

$$q(t) = Qe^{-\frac{1}{CR}}.$$

Intensitatea curentului (la descãrcare) este

$i(t) = -q'(t) = \dfrac{Q}{CR} e^{\frac{-t}{CR}} = I_0 e^{-t/(CR)}$ iar $v(t) = R \cdot i(t) = \dfrac{Q}{C} e^{\frac{-t}{CR}}$.

Momentul începând de la care descãrcarea este practic terminatã se considerã a fi τ pentru care $i(\tau) = \dfrac{I_0}{100}$. Se obține $e^{\frac{-\tau}{CR}} = \dfrac{1}{100}$ adicã $\tau = 2 \cdot C \cdot R \cdot \ln 10 \approx 4,6 \cdot C \cdot R$

3.6. Incãrcarea unui condensator printr-o rezistențã în prezența unei surse de curent continuu (liniarã)

Problemã : Se considerã un circuit alcãtuit dintr-un condensator cu capacitatea C, o rezistențã R şi o sursã de curent continuu având forța electromotoare constantã E. Se cere sã se determine intensitatea curentului şi diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de momentul la care se face mãsurarea.

Rezolvare : Se considerã funcțiile $i,q,v:[0,+\infty)\to R$ care reprezintã intensitatea curentului, sarcina condensatorului şi diferența de potențial la bornele acestuia în funcție de timp.

La încãrcarea condensatorului $i(t)=q'(t)$ iar $v(t)=\dfrac{q(t)}{C}$.

Legea lui Kirchoff aratã cã $i(t)=\dfrac{E-v(t)}{R}$, deci problema Cauchy ce caracterizeazã circuitul este

$$\begin{cases} R\cdot q'(t)+\dfrac{q(t)}{C}=E \\ q(0)=0 \end{cases}.$$

Soluția generalã a ecuației (liniarã şi neomogenã de ordinul I) este $q(t)=CE+Ke^{-\frac{t}{CR}}$ iar soluția problemei Cauchy este

$$q(t)=C\cdot E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

Rezultã imediat $v(t)=\dfrac{q(t)}{C}=E\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$ şi $i(t)=q'(t)=\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$.

Momentul în care condensatorul este practic încãrcat este cel la care diferența de potențial este $v(\tau)=\dfrac{99}{100}E$. Din $\dfrac{99}{100}E=E\left(1-e^{-\frac{\tau}{CR}}\right)$ rezultã $\tau=C\cdot R\cdot\ln 100\approx 4,6\cdot C\cdot R$

3.7. Transformarea energiei electrice in căldură (liniară)
Problemă: Să se descrie modificarea temperaturii unui corp în raport cu mediul ambiant atunci când pentru încălzire se foloseşte energia electrică.

Variabila independentă este timpul t (măsurat în secunde) iar funcția necunoscută este temperatura corpului $\theta = \theta(t)$ presupusă aceeaşi în toate punctele corpului.

Se consideră W puterea electrică măsurată în waţi, m masa corpului măsurată în grame, c căldura masică (cantitatea de căldură necesară pentru a ridica temperatura unui gram de material cu un grad), S suprafaţa de răcire, α coeficientul de împrăştiere (cantitatea de cădură împrăştiată de 1cm^2 într-o secundă pentru ridicarea temperaturii cu un grad)

Pentru obţinerea ecuaţiei se foloseşte principiul conservării energiei, considerând că în durata de timp Δt energia electrică este utilizată pentru a ridica temperatura corpului (cu masa m grame) cu $\Delta\theta$ în timp ce o parte din căldurăeste împrăştiată:

Relaţia $\dfrac{W \cdot \Delta t}{4.18} = m \cdot c \cdot \Delta\theta + \alpha \cdot S \cdot \theta \cdot \Delta t$ conduce la ecuaţia diferenţială $\theta' + \dfrac{\alpha \cdot S}{m \cdot c} \cdot \theta = \dfrac{W}{4.18 \cdot m \cdot c}$. Se notează $B = \dfrac{\alpha \cdot S}{m \cdot c}$ şi $D = \dfrac{W}{4.18 \cdot m \cdot c}$ şi ecuaţia devine

Este o ecuaţie liniară de ordinul I, dar poate fi socotită şi ecuaţie cu variabile separabile. Ecuaţia omogenă $\theta'(t) + B \cdot \theta(t) = 0$ are soluţia generală $\theta(t) = C \cdot e^{-Bt}$. Aplicând metoda variaţiei constantei considerăm $\theta(t) = C(t) \cdot e^{-Bt}$ şi ecuaţia devine $C'(t) = D \cdot e^{Bt}$. Rezultă $C(t) = \dfrac{D}{B} e^{Bt} + K$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei este

$$\theta(t) = D / B + K \cdot e^{-Bt} = \frac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S} + K \cdot e^{-Bt}.$$

Dacă temperatura inițială θ_0 este precizată atunci $K = \theta_0 - \frac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}$. In această situație temperatura corpului va fi $\theta(t) = \frac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}\left(1 - e^{-Bt}\right) + \theta_0 e^{-Bt}$.

Temperatura maximă a corpului va fi $\theta_{\max} = \lim_{t \to \infty} \theta(t) = \frac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}$, indiferent de temperatura de pornire .

Dacă nu se foloseşte electricitatea pentru încălzire atunci $W=0$ şi temperatura corpului este $\theta(t) = \theta_0 e^{-Bt}$. Ea descreşte exponențial la 0.

3.8. Formula fundamentală a curentului alternativ (liniară)

Problemã : Se considerã un circuit în care acționeazã o forțã electromotoare datoratã unei variații de flux şi conținând o rezistență R şi o bobinã cu inductanța proprie L montate în serie. Sã se determine intensitatea curentului electric din circuit.

Rezolvare : Pentru a obține o variație a fluxului electric $\Phi(t)$ se considerã un cadru cu n spire de arie S mişcându-se într-un câmp magnetic cu inducția B, cadru închis printr-un circuit exterior. Acest cadru se roteşte uniform cu viteza unghularã ω.

Fluxul captat $\Phi(t)$ se descompune în douã pãrți :

- Fluxul $\Phi_1(t) = n \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t$ provenind de la polul nord al câmpului magnetic
- Fluxul $\Phi_2(t) = L \cdot i(t)$ generat de cadrul parcurs de curentul electric

Din relația (datã în problemã) $E(t) = -\Phi'(t)$ şi ținând cont de faptul cã $i(t) = \frac{E(t)}{R}$ se obține ecuația $i(t) = -\frac{n \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} \cos \omega t - \frac{L}{R} \cdot i'(t)$. Ea se scrie sub forma

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -n \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos \omega t = E_0 \cos \omega t$$

Din rezolvarea ecuației omogene se obține $i(t) = C \cdot e^{-Rt/L}$. Aplicând metoda variației constantei obținem $C' e^{-Rt/L} + C \frac{-R}{L} e^{-RT/L} + \frac{R}{L} C e^{-Rt/L} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$,

deci $C'(t) = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \cos \omega t$.

Rezultă

$$C(t) = \frac{E_0}{L} \int e^{Rt/L} \cos \omega t dt = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) e^{Rt/L} + k .$$

Soluția generală a ecuației este

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + k e^{-Rt/L}$$

Aceasta are o componentã periodicã dominantã (anume $R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t$) şi o componentã neglijabilã (anume $Re^{-\frac{R}{L}t}$) atunci când timpul t este mare. Din acest motiv curentul obținut se numeşte curent alternativ.

3.9. Oglinda parabolică (ecuație omogenă)

Problemă: Să se determine forma unei oglinzi care reflectă o rază luminoasă ce porneşte din origine pe o direcție paralelă cu Ox.

Graficul funcției necunoscute *y=y(x)* reprezintă oglinda în care se reflectă lumina

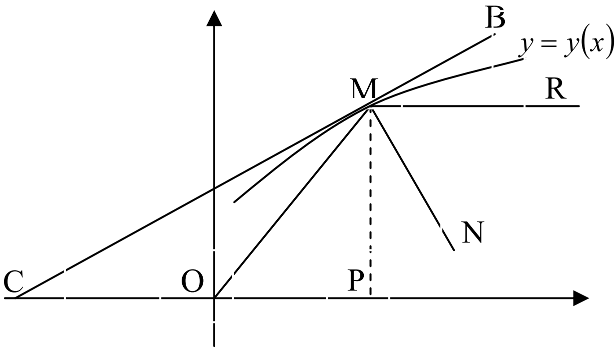

Figura 2 Oglinda parabolică

Raza *OM* este reflectată de oglindă pe direcția *MA*. Considerând tangenta *MB* la graficul funcției *y=y(x),* obținem

$\widehat{BMA} = \widehat{CMO} = \widehat{MCO}$ deoarece unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie.

Atunci $\widehat{MOP} = 2\widehat{BMA}$, deci

$$tg\left(\widehat{MOP}\right) = \frac{y(x)}{x} = tg(2\widehat{BMA}) = \frac{2tg\left(\widehat{BMA}\right)}{1-tg^2\left(\widehat{BMA}\right)} = \frac{2y'(x)}{1-(y'(x))^2}$$ şi se

obține ecuația omogenă

$$\frac{2y'}{1-(y')^2} = \frac{y}{x}.$$

In mod obişnuit pentru rezolvarea acestei ecuații se foloseşte substituția $y/x = u$, dar în acest caz calculele sunt complicate şi este mai util un artificiu de calcul datorat lui Lagrange: se notează $y' = m$ şi se derivează ecuația $y = x \cdot \frac{2m}{1-m^2}$.

Se obține o nouă ecuație $y' = \frac{2m}{1-m^2} + 2x\frac{1+m^2}{(1-m^2)^2}\cdot m' = m$ din care rezultă că $m' = \frac{m\left(m^2-1\right)}{2x}$, adică o ecuație cu variabile separabile.

Soluțile singulare $m(x)=0$ şi $m(x)=\pm 1$ nu convin problemei pentru că în acest caz se anulează numitorul din ecuația inițială.

Separând variabilele obținem $\frac{2m'}{m(m^2-1)} = \frac{1}{x}$ care, prin integrare conduce la $\ln\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right) = \ln(kx)$, adică $\frac{m^2-1}{m^2} = kx$. Introducând expresia $x = \frac{m^2-1}{km^2}$ în ecuația $y = x\cdot\frac{2m}{1-m^2}$ se obține $y = -\frac{2}{k\cdot m} = \frac{-2}{k\cdot y'}$, adică $m = -\frac{2}{ky}$.

Din $x = \frac{m^2-1}{km^2} = \frac{\left(-2/(ky)\right)^2-1}{k\left(-2/(ky)\right)^2}$ rezultă $y^2 = \frac{4}{k}\left(\frac{1}{k}-x\right)$ ceea ce arată că oglinda are forma unei parabole (se numeşte oglindă parabolică) al cărei focar este originea axelor de coordonate. In fapt ea reprezintă interiorul unui paraboloid de rotație.

3.10 Exerciții propuse

1. Se ştie că viteza de răcire a unui corp este proporțională cu diferența de temperatură între corp si mediul înconjurător.

a) Să se scrie relația care există între temperatura T şi timpul t, dacă un corp încălzit la T_0 grade este plasat într-o cameră a cărei temperatură constantă este de a grade.

b) In cât timp va scadea la 30 grade temperature unui corp încălzit la 100 grade dacă temperatura camerei în care e introdus este 20 grade şi în primele 20 min corpul se răceşte la 60 grade?

R: a) $T'(t) = k(T(t) - a)$ are soluția $T(t) = (T_0 - a)e^{-kt}$

b) $T_0 = 100,\ a = 20$; din $T(20) = 60$ rezultă $e^{-k} = (1/2)^{1/20}$; timpul necesar este 60 min

2. Frânarea unui disc care se roteşte uniform într-un lichid este proporțională cu viteza unghiulară .

a) Scrieți şi rezolvați ecuația care descrie modificările vitezei unghiulare în timpul rotației.

b) Care este viteza dicului dupa 3 min dacă viteza sa inițială a fost de 100 turații/min şi după un minut viteza sa a scăzut la 60 turații /min.

R: a) $\omega'(t) = -k\omega(t)$, *k>0*, are soluția $\omega(t) = C \cdot e^{-kt}$; semnul "-" ce apare în ecuație arată că miscarea este încetinită.

b) $\omega(t) = 100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$ deci $\omega(3) = 21.6$ grade

3. Viteza de dezintegrare a radiului este proporțională cu cantitatea sa. Se ştie că după 1600 ani nu rămâne decât o jumătate din cantitatea de radiu inițială (perioada de înjumătățire este 1600 ani). Să se determine procentajul de radiu dezintegrat după 100 ani.

R: Se consideră *Q(t)* cantitatea de radiu dezintegrată sin cantitatea inițială C_0. Ecuația liniară $Q'(t) = k \cdot (C_0 - Q(t))$ şi condiția inițială $Q(0) = 0$ conduc la $Q(t) = C_0(1 - e^{-kt})$. Din condiția $Q(0) = 2 \cdot Q(1600)$ rezultă $e^{-k} = (1/2)^{1/1600}$.

Procentajul cerut este $100 \cdot (Q(100)/Q(0))\% = \left(1 - 1/\sqrt[16]{2}\right) \cdot 100\% \approx 4.23\%$.

4. Viteza de scurgere a apei printr-o deschidere aflată pe verticală la distanța *h* de suprafața apei este dată de formula $v = c\sqrt{2gh}$ unde

$c \approx 0.6$ şi g este acceleraţia gravitaţională. In cât timp se va goli un rezervor cubic cu latura de 1m printr-o deschidere practicată la baza sa.

R: Se consideră $h = h(t)$ înălţimea lichidului scurs până la momentul t.

Ecuaţia diferenţială $h'(t) = c\sqrt{2g(1 - h(t))}$ şi condiţia iniţială $h(0) = 0$ caracterizează fenomenul de curgere. Soluţia problemei Cauchy este $h(t) = c\sqrt{2g}\left(1 - \frac{c\sqrt{2g}}{2}t\right)$.Rezervorul se va goli atunci când $h(t_g) = 0$, adică $t_g = \frac{2}{c\sqrt{2g}} \approx 0.745$ unităţi de timp.

5. Cantitatea de lumină absorbită de un rezervor de apă este proporţională cu cantitatea de lumină incidentă şi cu adâncimea rezervorului. Se ştie că într-un rezervor cu adâncimea de 3m apa absoarbe jumătate din catitatea de lumină iniţială. Care este cantitatea de lumină care poate ajunge la o adâncime de 30m?

R: Cantitatea de lumină absorbită, $Q = Q(h)$ depinde de adâncimea la care se află observatorul. Ecuaţia diferenţială ce caracterizează fenmenul de absorbţie este

$Q'(h) = k(C_0 - Q(h))$ şi condiţia iniţială impusă este $Q(30) = Q(0)/2$.Soluţia problemei Cauchy asociată este $Q(h) = Q_0 \cdot \left(1 - (1/2)^{h/3}\right)$. Cantitatea de lumină absorbită până la 30m este $Q(30) = Q_0\left(1 - (1/2)^{10}\right)$ iar cantitatea de lumină ce

pătrunde la acel nivel este $Q_0 \cdot (1/2)^{10}$.

6. Rezistenţa aerului exercitată asupra unui corp lansat cu o paraşută este proporţională cu pătratul vitezei de mişcare. Să se determine viteza limită pe care o poate atinge un corp.

R: Ecuația diferențală este $mv' = mg - kv^2$ şi are soluția

$$v(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{k/m}\cdot(g\cdot t+C)} - 1}{e^{2\sqrt{k/m}\cdot(g\cdot t+C)} + 1}.$$

Valoarea lui C se determină din condițiile inițiale. Din analiza expresiei lui v se poate deduce că viteza creşte pe măsură ce timpul trece şi tinde să atingă valoarea maximă admisă $v_{\max} = 1/\alpha = \sqrt{m/k}$

7. Baza unui rezervor de 300 l este acoperită cu un amestec de sare şi substanță insolubilă. Presupunând că viteza de dizolvarea sării este proporțională cu diferența între concentrația instantanee şi concentrația soluției saturate (1 kg sare pentru 3 l apă) si cantitatea de apă pură dizolvă 1/3 kg sare pe minut, să se determine cantitatea de sare din soluție după o oră.

R: se notează $x(t)$ cantitatea de sare din soluție la momentul t (sare dizolvată în apă). Ecuația diferențială este $x'(t) = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$. Soluția problemei Cauchy care foloseşte condiția inițială $x(0) = 0$ este $x(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{kt}{300}}\right)$. După o oră cantitatea de sare din soluție va fi $x(60) = 100\left(1 - e^{-\frac{k}{5}}\right)$

CAPITOLUL 4

Ecuații diferențiale de ordin superior

4.1. Ecuații liniare

O problemã inportantã este rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin mai mare ca 1. Sunt puține ecuațiile pentru care se poate preciza forma analiticã a soluției. Cel mai frecvent utilizate sunt ecuațiile liniare.

Forma generalã a ecuației liniare de ordin n este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \qquad (6)$$

Ecuația liniarã omogenã asociatã ecuației (6) este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 \qquad (7)$$

În legãturã cu ecuațiile liniare şi omogene se poate demonstra urmatorul rezultat important.

Teorema 1 a) Dacã $p \in N$ şi $y_1, y_2, ..., y_p$ sunt soluții ale ecuației (7) iar $C_1, C_2, ..., C_p \in R$ atunci

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_p y_p$$

este soluție a ecuației (7).

b) Mulțimea soluțiilor ecuației (7) formeazã un spațiu vectorial de dimensiune *n*.

c) Dacã ecuația (7) admite soluția complexă $y = u + i \cdot v$ atunci funcțiile reale u şi v sunt soluții ale ecuației (7).

Observație : pentru determinarea soluției generale e ecuației omogene trebuie determinate *n* soluții liniar independente

Teorema 2 Soluțiile $y_1, y_2, ..., y_n : I \to R$ ale ecuației (7) sunt liniar independenta dacã şi numai dacã existã $x_0 \in I$ astfel încât determinantul

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & ... & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & ... & y_2'(x) \\ .... & & & \\ y_n(x) & y_n'(x) & ... & y_n'(x) \end{vmatrix}$$

(numit wronskianul sistemului) sã fie nenul în x_0.

Observații : 1) Teorema Abel-Ostrogradski-Liouville aratã cã, dacã I este un interval ce conține pe x_0 şi $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x_0) \neq 0$, atunci $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$

2) Dacã $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (7) şi $C_1, C_2, ..., C_n \in R$ atunci soluția generalã a ecuației (7) este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n . \tag{8}$$

În cazul sistemelor cu coeficienți constanți determinarea soluțiilor liniar independente se face cu ajutorul ecuației caracteristice, dar reprezintã o problemã complicatã în cazul sistemelor cu coeficienți variabili.

Pentru sistemele neomogene sa poate arãta cã :

Teorema 3 : Soluția generalã a ecuației (6) este suma dintre soluția generalã a ecuației omogene ataşatã, (7), şi o soluție particularã a ecuației (6).

Metoda de rezolvare a ecuațiilor liniare are trei paşi:

- se rezolvã ecuația omogenã şi se obține soluția y_G
- se determinã o solutie y_P a ecuației neomogene
- se scrie soluția generalã a ecuației neomogene $y = y_G + y_P$.

4.1.1. Ecuații liniare cu coeficienți constanți

Pentru rezolvarea ecuațiilor cu coeficienți constanți este cunoscut algoritmul de rezolvare a ecuației omogene.

Dacă funcția $f(x)$ are anumite forme particulare atunci există reguli şi pentru determinarea unei soluții particulare.

A1) **Rezolvarea ecuației omogene**
Forma generalã a unei ecuații cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (9)$$

Problema rezolvãrii ecuației (9) se reduce deci la determinarea unul sistem fundamental de soluții. În cele ce urmeazã prezentãm principala metodã de rezolvare pentru ecuațiile liniare.

O soluție a ecuației se cautã sub forma $y(x)=e^{\lambda x}$, prin analogie cu cazul $n=1$. Prin înlocuire în ecuația (9) se obține, dupã simplificarea cu $e^{\lambda x}$, ecuația caracteristicã

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (10)$$

Teorema 4 : Fie $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ soluțiile ecuației (10).

a) - dacã $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ sunt reale şi distincte ale ecuației (10), atunci $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$,..., $e^{\lambda_n x}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (9).

b) - dacã λ_1 este rãdãcinã realã cu ordinul de multiplicitate p pentru ecuația (10), atunci $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{p-1}e^{\lambda_1 x}$ sunt p soluții liniar independenteale ecuației (9).

c) -dacã $\lambda_1=a+ib$ este rãdãcinã complexã de ordinul p a ecuației (10) atunci

$$\begin{array}{ll} e^{ax}\cos(bx), & e^{ax}\sin(bx) \\ xe^{ax}\cos(bx), & xe^{ax}\sin(bx) \\ x^2e^{ax}\cos(bx), & x^2e^{ax}\sin(bx) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), & x^{n-1}e^{ax}\sin(bx) \end{array}$$

sunt soluții liniar independente ale ecuației (9).

Sistemul fundamental de soluții se obține prin însumarea soluțiilor liniar independente corespunzãtoare tuturor rãdãcinilor ecuației (10), iar soluția generalã a ecuației (9) se obține folosind formula (8) .

Exemple : Sã se determine soluția generalã a urmãtoarelor ecuații :

1. $y'''-6y''+11y'-6y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$, Se aplicã a) din Teorema 4 şi se obține sistemul fundamental de (trei) soluții format din $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$. Soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$$

2. $y'''+3y''+3y'+y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Se aplicã b) din Teoremã pentru $p=3$. Sistemul fundamental de (trei) soluții este format din $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$, iar soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

3. $y''+4y'+5y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^2+4\lambda+5=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=-2+i$ şi $\lambda_2=-2-i$ deci se aplicã c) din Teoremã pentru $a=-2,\ b=1,\ p=1$. Sistemul fundamental de (douã) soluții este format din soluțiile $y_1=e^{-2x}\cos x$ şi $y_2=e^{-2x}\sin x$ iar soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x$$

4. $y^{IV}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4=0$ cu soluțiile $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=i$ şi $\lambda_4=-i$.

Soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

A2) Determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

Forma generală a ecuației neomogene cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Nu există metode generale de determinare a unei soluții particulare dar, în unele cazuri simple, se pot folosi rezultatele următoare :

Dacă $f(x) = P(x)$ este un polinom de grad k atunci soluția particulară este un polinom de acelaşi grad, cu coeficienți necunoscuți care se vor determina prin înlocuirea în ecuație.

a) Dacă $f(x) = e^{ax} P(x)$ unde $P(x)$ este un polinom de grad k există două situații

- Dacă a nu este rădăcină a ecuației caracteristice soluția particulară se caută sub forma $y_P = e^{ax} Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți
- Dacă a exte rădăcină de ordin r a ecuației caracteristice atunci soluția particulară se caută sub forma $y_P = x^r e^{ax} Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți

b) Dacă $f(x) = e^{ax}\left(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)\right)$ atunci există de asemeni două situații

- Dacă $z = a + bi$ nu este soluție a ecuației caracteristice soluția particulară se caută sub forma $y_p(x) = e^{ax}\left(S(x)\cos(bx) + T(x)\sin(bx)\right)$, unde $R(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q

- Dacã $z = a + bi$ este soluție de ordin r a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_p(x) = x^r e^{ax}\left(S(x)\cos(bx) + T(x)\sin(bx)\right)$, unde $T(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q.

În unele situații, pentru determinarea soluțiilor particulare, se poate aplica principiul superpoziției :

Dacã y_{P1} şi y_{P2} sunt soluții ale ecuațiilor $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$, respectiv $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x)$, atunci $y_{P!} + y_{P2}$ este soluție a ecuației
$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) + g(x)$.

Exemple : Sã se determine câte o soluție particularã pentru urmãtoarelor ecuații :

1. $y'' - 2y' + y = x$

Funcția $f(x)$ este un polinom de gradul I, deci soluția particularã se cautã sub forma $y_P(x) = ax + b$. Atunci $y'(x) = a$ şi $y''(x) = 0$. Introducând în ecuație obținem $0 - 2a + ax + b = x$ şi din identificarea coeficienților rezultã $a = 1$ şi, adicã $b = 2$. Soluția particularã este $y_P(x) = x + 2$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + x + 2$

2. $y'' - 2y' + y = xe^x$

Deoarece $f(x) = xe^x = e^{1\cdot x}P(x)$ se încadreazã la b) pentru $a = 1$, $P(x) = x$ şi $a = 1$ este rãdãcinã dublã a ecuației caracteristice , soluția particularã se va cãuta sub forma $y_P(x) = x^2e^x(Ax + B)$.

Atunci $y'(x) = e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2x\right)$

şi $y''(x)=e^x\left(Ax^3+Bx^2+6Ax^2+4Bx+6Ax+2B\right)$. Introducând în ecuație obținem $e^x\left(6Ax+2B\right)=xe^x$. Din identificarea coeficienților se obține $A=1/6$ şi $B=0$.
Soluția particularã este deci $y_P=x^3e^x/6$.
Soluția generalã a ecuației este $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+x^3e^x/6$.
3. $y''+y=x\sin x$
Funcția $f(x)=x\sin x=e^{0x}\left(0\cdot\cos x+x\sin x\right)$ se încadreazã la c) pentru $a=0,\ b=1,\ P(x)=0$ şi $Q(x)=x$. Deoarece $z=0+i$ este soluție a ecuației caracteristice $\lambda^2+1=0$, soluția particularã se va cãuta sub forma $y_P=xe^{0x}\left[\left(Ax+B\right)\cos x+\left(Cx+D\right)\sin x\right]$. Înlocuin în ecuație şi identificând coeficienții se obține sistemul

$$2A+2D=0,\ 4C=0,\ -2B+2C=0,\ -4A=1$$

cu soluția $A=1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Soluția perticularã este deci $-x^2\cos x/4+x\sin x/4$.
Soluția generalã a ecuației este
$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\cos x/4+x\sin x/4$

4.1.2. Ecuații cu coeficienți variabili

Pentru determinarea soluției generale a ecuației omogene cu coeficienți variabili nu exista metode generale. Dacã însã aceastã soluție poate fi precizatã, pentru determinarea unei soluții particlare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teorema 5: Fie $C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ soluția generalã a ecuației omogene

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

Dacã $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n' = 0 \\ .... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

atunci $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n$ **este soluție a ecuației (7)**

Exemplu : Sã se determine soluția generalâ a ecuației
$xy'' + y' = x, \quad x > 0$
Se notează $y' = z$. Ecuația omogenã asociatã este $xz' + z = 0$ .Rezultã
$z = C_1 \dfrac{1}{x}$ adicã $y = C_1 \ln(x) + C_2$ Se folosește metoda variației constantelor pentru $y_1(x) = \ln x$ şi $y_2(x) = 1$. Sistemul devine

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2' = 0 \\ C_1'(x)\dfrac{1}{x} + C_2'\cdot 0 = x \end{cases} \text{ cu soluțiile } \begin{cases} C_1(x) = x^2 \\ C_2(x) = -x^2 \ln x \end{cases}. \text{ Rezultã}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + A \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{3}\ln x + \dfrac{x^3}{9} + B \end{cases}.$$

Soluția generalã a ecuației este $y(x) = \dfrac{x^3}{9} + A\ln x + B$.

Observație: Metoda variației constantelor poate fi folosită si pentru determinarea soluțiilor particulare ale ecuațiilor omogene cu coeficienți constanți atunci când funcția $f(x)$ nu se încadrează în situațiile prezentate anterior.

Exemplu: Sã se determine soluția generalã a ecuației

$y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$**,** $x>0$**.**

Soluția generalã a ecuației omogene este $y_G\left(x\right)=C_1e^x+C_2xe^x$. Se aplicã variația constantelor pentru $y_1\left(x\right)=e^x$ și $y_2\left(x\right)=xe^x$.

Sistemul obținut este $\begin{cases} C_1'e^x+C_2'xe^x=0 \\ C_1'e^x+C_2'\left(e^x+xe^x\right)=\dfrac{e^x}{x} \end{cases}$ cu soluțiile

$\begin{cases} C_1\left(x\right)=-x+A \\ C_2\left(x\right)=\ln x+B \end{cases}.$

Soluția generalã a ecuației este $y\left(x\right)=\left(-x+A\right)e^x+xe^x\left(\ln x+B\right)$.

4.2. Ecuații incomplete

Ecuațiile diferențiale incomplete de ordin *n* sunt ecuații (în general neliniare) în expresia cãrora nu apar toate derivatele funcției necunoscute pânã la ordinul *n-1* . Penrtu rezolvarea lor se folosesc substitutii care le micşoreaza ordinul.

4.2.1 Ecuații in care funcția necunoscutã apare doar prin derivatele sale

Ecuațiile de forma $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$ se reduc la o ecuație de ordin *n-k* prin substituția $z=y^{(k)}$.

Exemplu : $y''=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}$ se transforma într-o ecuație de ordinul I folosind substituția $z=y'$. Ecuația $z'=\sqrt{1+z^2}$ este o ecuație cu variabile separabile şi are soluţia generalã $z=\frac{1}{2C}e^{-x}-\frac{C}{2}e^{x}$. Rezultã deci cã $y(x)=\int z(x)dx=C_1-\frac{1}{2C}e^{-x}-\frac{C}{2}e^{x}$.

4.2.2. Ecuaţii în care variabila independentã nu apare explicit

Aceste ecuaţii au forma $F\left(y,y',...,y^{(n)}\right)=0$.

Se noteazã $y'=p(y)$. Atunci

$$y''=(y')'=(p(y))'=p'(y)y'=p\cdot p'(y)$$

$$y'''=(y'')'=\left(p\cdot p''+(p')^2\right)\cdot p$$

....

Si ecuaţia devine $f\left(y,p,p',....p^{(n-1)}\right)=0$. Aceeaşi procedurã se poate aplica pentru a micşora ordinul în continuare.

Sunt numeroase cazurile în care derivata apare în ecuaţie doar la puteri pare. În acest caz se face notaţia $p=(y')^2$.

Exemplu : $y\cdot y''=1+(y')^2$.

Se noteazã $p=(y')^2$. Rezultã cã $p'(x)=p'(y(x))y'(x)=2y'(x)y''(x)$ deci $y''=p'/2$.

Din ecuaţia cu variabile separabile $p'=2(1+p)\cdot\frac{1}{y}$ rezultã $p=Cy^2-1$ adicã $y'=\pm\sqrt{Cy^2-1}$.

Prin integrare directă de obţine $\frac{1}{\sqrt{C}y}\ln\left(\sqrt{C}y+\sqrt{Cy^2-1}\right)=\pm x+A$.

Soluţia ecuaţiei este $y=\frac{\left(C_1e^{\pm\sqrt{C}x}\right)^2-1}{2\sqrt{C}\left(C_1e^{\pm\sqrt{C}x}\right)}$.

4.3. Exerciții propuse :

Determinați soluțiile generale ale următoarelor ecuații :

1. $y''-4y'+4y=x^2$ **R :** $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$

2. $y''-y'+y=x^2+6$ **R :**
$$y(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$+x^2+2x+6$$

3. $y''+2y'+y=e^{2x}$ **R :** $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$

4 $y''-8y'+7y=14$ **R :** $y(x)=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$

5. $y''-y'=e^x$ **R :** $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$

6. $y''+y'-6y=xe^{2x}$ **R :** $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$

7. $y''+y=\cos x$ **R :** $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$

8. $y''+y=\sin^2 x$ **R :** $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{6}\cos(2x)$

9. $y'''-13y''+12y=0$ **R :** $y(x)=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$

10. $y'''-y=0$ **R :**
$$y=C_1e^x+$$
$$+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_3\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

11. $y^{IV}+4y=0$ **R :**
$$y=\cos x\left(C_1e^x+C_3e^{-x}\right)+$$
$$+\sin x\left(C_2e^x+C_4e^{-x}\right)$$

12. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$

R : $y(x) = C_1 + C_2x + \left(C_3 + C_4x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^x$

13. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$**,** $x > 0$

R : $y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-x} + xe^{-x}\ln x$

14.
$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin 2x$

R : ec. omogenã are soluția
$y(x) = C_1x + C_2x^2$.
Ec. inițială are soluția
$$y = 1 + C_1x + C_2x^2 - \frac{x\sin 2x}{2} -$$
$$- x^2 \cos x$$

15. $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$

R: ec omogenã are soluția
$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$
$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x) -$$
$$- \frac{3}{2x} - \frac{3}{4}$$

CAPITOLUL 5

Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I

5.1 Considerații generale

Forma explicitã a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I este

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (11)$$

unde $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt funcții date, continue pe un domeniu din R^{n+1}.
O problemã Cauchy este formatã dintr-un sistem de ecuații diferențiale şi un set de condiții inițiale,

$$y_1(x_0) = a_1,\ y_2(x_0) = a_2, ..., y_n(x_0) = a_n \qquad (12)$$

O soluție a sistemului (11) este formatã din funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ care verificã sistemul.
Astfel de sisteme de ecuații diferențiale apar în mod natural în dinamică, acolo unde legea fundamentală ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) se poate scrie (ținând cont că $\vec{a} = (x''(t), y''(t), z''(t))$ şi
$\vec{F} = (f_1(t, x, y, z, x', y', z'), f_2(t, x, y, z, x', y', z'), f_3(t, x, y, z, x', y', z'))$.
Ecuațile de mişcare sunt deci

$$\begin{cases} x'' = f_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ y'' = f_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ z'' = f_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

iar prin notația $x' = u,\ y' = v,\ z' = w$ se obține un system de 6 ecuații diferențiale de ordinul I.
In legatură cu soluțile sistemelor de ecuații diferențiale există câteva rezultate importante.

Teorema 1 Orice sistem de n ecuații diferențiale diferențiale de ordinul I scris sub forma (11) este echivalent cu o ecuație diferențialã de ordin n şi reciproc, orice ecuație diferențialã de ordin n este echivalentã cu un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I

Observație: soluția sistemului (11) poate fi gãsitã rezolvând ecuația de ordin n ataşatã prin metoda substituției (se derivează una din ecuațiile sistemului de $n-1$ ori, celelalte de $n-2$ ori şi se eliminã $n-1$ funcții necunoscute). Această metodã se mai numeşte şi *metoda ecuației rezolvante*.

Exemplu : Sã se rezolve sistemul $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$ **.**

Derivând prima ecuație obținem $y'' = z'$. Inlocuind aici $z' = -y$ (din a doua ecuație a sistemului) onținem ecuația de ordinul II $y'' + y = 0$ cu soluția $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Rezultã $z(x) = y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

5.2 Sisteme liniare şi omogene de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

Forma generalã a sistemului este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (13)$$

Sistemului (13) i se asociazã matricea coeficienților, anume $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Dacã notãm $Y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^{\tau}$ şi $Y'=\left(y_1',y_2',...,y_n'\right)^{\tau}$ atunci sistemul se scrie în forma matriceală

$$Y'=A\cdot Y \qquad (13')$$

şi rezultatele prezentate la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n arată că mulţimea soluţiilor sistemului reprezintă un spaţiu vestorial de dimensiune « n ».

Soluţiile fundamentale ale sistemului vor fi cãutate sub forma $Y_i=\left(\alpha_{1i}\,\alpha_{2i}\,....\alpha_{ni}\right)^{\tau}e^{\lambda_i x}$ unde λ_i sunt valori proprii a matricii A, adică soluţiile ecuaţiei caracteristice a sistemului :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\; a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\; a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (14)$$

iar constantele α_{ij} trebuiesc determinate din sistem.

Dacă $Y_1,Y_2,...,Y_n$ sunt n soluţii liniar independente atunci soluţia generalã a sistemului este

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+...+C_nY_n \qquad (15)$$

Existã urmãtoarele situaţii importante :

- Dacã ecuaţia caracteristicã (14) are soluţiile reale şi distincte $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ şi $V_1,V_2,...,V_n$ sunt vectorii corespunzãtori acestor valori atunci soluţia sistemului este
$$Y\left(x\right)=C_1V_1e^{\lambda_1 x}+C_2V_2e^{\lambda_2 x}+...+C_nV_ne^{\lambda_n x}$$
- Dacă ecuaţia caracteristică (14) are soluţii multiple (reale sau complexe), fiecare soluţie λ cu ordinul de multiplicitate p contribuie în suma (15) cu termenii
$$Y_1=V_1e^{\lambda x},\; Y_2=e^{\lambda x}\left(\frac{x}{1!}V_1+V_2\right),\; \dots,$$
$$Y_p=e^{\lambda x}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}V_1+\frac{x^{p-2}}{\left(p-2\right)!}V_2+...+\frac{x}{1!}V_{p-1}+V_p\right)$$

unde $V_1, V_2, ... V_p$ sunt vestorii proprii corespunzãtori valorii proprii λ.
Problema rezolvãrii sistemului (13) se reduce deci la determinarea valorilor proprii pentru matricea A şi a vectorilor proprii corespunzãtori acestor valori.

Metoda de rezolvare :

a) Se scrie matricea A a sistemului ;
b) Se determinã valorile proprii ale matricii rezolvand ecuația (14) ;
c) Pentru fiecare valoare proprie λ_i se determinã vectorii proprii (atâția cât e ordinul de multiplicitate al lui λ_i şi se scriu soluțiile corespunzãtoare lui λ_i ;
d) Se scrie sistemul fundamental de soluții al sistemului ;
e) Se scrie soluția generalã.

Exemple : Sã se determine soluția generalã a sistemelor urmãtoare

1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ şi $\lambda_3 = 6$, adicã soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

c) Valoarea λ_1 are ordinul de multiplicitate 1, deci va avea un singur vector propriu $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ care verificã ecuatia

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Din rezolvarea sistemului compatibil nederminat cu un grad de libertate $\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2\alpha_3 \end{cases}$

ee obține soluția $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Se dã lui α o valoare particularã, de exemplu

$\alpha = 1$ şi obținem $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In mod asemãnãtor obținem $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corespunzând valorilor λ_2 şi λ_3.

d) Sistemul fundamental este $Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$,

$Y_3 = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ -2e^{6x} \\ e^{6x} \end{pmatrix}$.

e) Soluția generalã este $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$,

adică $\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \\ y_2 = \qquad\quad C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x} \\ y_3 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristicã ,

$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ are rãdãcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Un vector propriu al lui λ_1 este $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Subspațiul valorii proprii $\lambda_2 = \lambda_3$ are dimensiunea 2. Vectorii proprii satisfac ecuația $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, adicã sistemul cu douã grade de nedeterminare $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$. Alegând $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0$ se obține $\alpha_3 = 1$ şi pentru $\alpha_1{}^* = 0, \alpha_2{}^* = 1$ se obține $\alpha_3{}^* = -1$. Cei doi vectori proprii principali vor fi $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Valorile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1{}^*, \alpha_2{}^*$ se aleg astfel încât

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1{}^* & \alpha_2{}^* \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2{}^* - \alpha_2\alpha_1{}^* \neq 0 .$$

Soluția generalã a sistemului este

$Y = C_1V_1e^{2x} + C_2V_2e^{-x} + C_3(xV_2 + V_3)e^{-x}$ adicã

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x} - C_2e^{-x} - C_3xe^{-x} \\ y_2 = C_1e^{2x} \qquad\qquad + C_3e^{-x} \\ y_3 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3\left(x-1\right)e^{-x} \end{cases} .$$

5.3. Sisteme liniare neomogene cu coeficienți constanți

Forma generalã este

$$Y'\left(x\right) = A \cdot Y\left(x\right) + F\left(x\right) \tag{16}$$

Ca şi în cazul ecuațiilor liniare neomogene, soluția generalã a sistemului neomogen este suma dintre soluția generalã a sistemului omogen si o soluție particularã a sistemului neomogen.
Pentru determinarea soluției particulare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremã : Dacã $Y = C_1Y_1 + ... + C_nY_n$ este soluția sistemului omogen asociat lui (16) atunci o soluție particularã a acestuia este $Y_P = C_1\left(x\right)Y_1 + ... + C_n\left(x\right)Y_n$ unde funcțiile $C_1\left(x\right), ..., C_n\left(x\right)$ satisfac ecuația

$$C_1{}'\left(x\right)Y_1 + C_2{}'\left(x\right)\left(Y_2\right) + ... + C_n{}'\left(x\right)Y_n = F\left(x\right) \tag{17}$$

Din ecuația (17) se calculează $C_1'(x),...,C_n'(x)$ şi apoi, prin integrare se obțin $C_1,C_2,...,C_n$.

Exemplu : Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x'=5x-3y+2e^{3t} \\ y'=x+y+5e^{-t} \end{cases}$

Sistemul omogen $\begin{cases} x'=5x-3y \\ y'=x+y \end{cases}$ are matricea coeficienților data de

$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Valorile sale proprii sunt $\lambda_1=4$ şi $\lambda_2=2$, vectorii proprii corespunzator acestora sunt $V_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, respective $V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ iar soluția generală a sistemului este

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}=C_1\cdot V_1\cdot e^{4t}+C_2\cdot V_2\cdot e^{2t}=\begin{pmatrix} 3C_1e^{4t}+C_2e^{2t} \\ C_1e^{4t}+C_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Expresiile pentru C_1 şi C_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} 3C_1'e^{4t}+C_2'e^{2t}=2e^{3t} \\ C_1'e^{4t}+C_2'e^{2t}=5e^{-t} \end{cases}.$$

Soluții ale acestui sistem sunt

$$C_1=e^{-5t}/2-e^{-t}, \quad C_2=-e^{t}-5e^{-3t}/2$$

O soluție particulară a sistemului neomogen este $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -e^{-t}-4e^{3t} \\ -2e^{-t}-2e^{3t} \end{pmatrix}$

Rezultă că soluția generală a sistemului este

$$\begin{cases} x = 3C_1e^{4t} + C_2e^{2t} - e^{-t} - 4e^{3t} \\ y = C_1e^{4t} + C_2e^{2t} - 2e^{-t} - 2e^{3t} \end{cases}$$

5.4 Exerciţii propuse

I Sã se rezolve sistemele urmãtoare :

1. $\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = 3x^2/2 \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^2 + x$ **,**

$z = -C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}/4 - x^2/2$

2. $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x \\ z' - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$ **R :** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \dfrac{3}{8}\cos x - \dfrac{1}{8}\sin x$

$z = \sin x - 2y - y'$

3. $\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = y \end{cases}$ **R :**

$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + C_3e^{-x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$z(x) = y'(x)$

$u(x) = z'(x)$

4. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ **R :** $x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-3t}$

$y(t) = C_1e^{t} - C_2e^{-3t}$

5. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y + t \end{cases}$ **R :** $x(t) = C_1 + C_2e^{2t} - \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}$

$y(t) = -C_1 + C_2e^{2t} + \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}$

6. $\begin{cases} y' = z + u \\ z' = y + u \\ u' = y + z \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} y(x) = C_1e^{2x} - (C_2 + C_3)e^{-x} \\ z(x) = C_1e^{2x} + C_3e^{-x} \\ u(x) = C_1e^{2x} + (xC_3 + C_2 - C_3)e^{-x} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4x - y + z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = y + z \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = \left[C_2 + C_3(t+2)\right]e^{3t} \\ y = C_1e^{2t} + \left[2C_2 + C_3(2t+1)\right]e^{3t} \\ z = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3t)e^{3t} \end{cases}$

8. **R :**

$\begin{cases} y_1^{/} = 3y_1 - 8y_2 + 4y_3 \\ y_2^{/} = -y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ y_3^{/} = -3y_1 + 14y_2 - 6y_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$

9. $\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1 \\ y' = -x + tgt \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + tgt \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t + C_2 - t^2\right)e^t \\ y = \left(C_1 + C_2 t + 2t - t^2\right)e^t \end{cases}$

II Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y^{/} - \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot y = 0 \\ z^{/} - y + \dfrac{1}{x} \cdot z = x \\ y(1) = 2, \quad z(1) = 1 \end{cases}$.

R : $\begin{cases} y(x) = 1 + x^2 \\ z(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3x} \end{cases}$

CAPITOLUL 6
Elemente de calcul operaţional şi aplicaţii în teoria ecuaţiilor diferenţiale

Calculul operaţional se ocupã cu studiul transformãrilor integrale. Acestea, numite şi “operatori integrali”, transformã derivarea şi integrarea în operaţii algebrice. Ecuaţiilor diferenţiale şi integrale le corespund ecuaţii algebrice. Pentru a rezolva o ecuaţie diferenţialã este suficient sã se rezolve ecuaţia algebricã şi sã se aplice transformarea integralã inversã soluţiei obţinute. Cele mai directe aplicaţii în studiul ecuaţiilor diferenţiale îl are transformata Laplace.

6.1. Transformata Laplace

Transformata Laplace este un operator între douã spaţii de funcţii, operator care transformã derivarea şi integrarea în operaţii algebrice.
Notãm $F_R = \{f : R \to R\}$.

Definiţie: Funcţia $f \in F_R$ este un original dacã satisface condiţiile urmãtoare:

a) $f(t) = 0$ pentru orice $t < 0$

b) f e derivabilã pe porţiuni

c) existã $M > 0$ şi $s > 0$ astfel încât $|f(t)| < M \cdot e^{st}$ pentru orice $t > 0$.

Numãrul pozitiv $s_0 = \min\left\{s \mid |f(t)| < M \cdot e^{st},\ \forall t > 0\right\}$ se numeşte indice de creştere (sau abscisã de convergenţã).

Mulţimea funcţiilor original se noteazã O_R.

Exemple: Urmãtoarele funcţii sunt funcţii original:

a) $f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ **(** $M = 1,\ s_0 = k$ **)**

b) $\sigma(t)=\begin{cases}1 & ,\ t>0\\ 1/2 & ,\ t=0\\ 0 & ,\ t<0\end{cases}$ **(** $M=1$, $s_0=0$ **)**

Aceastã funcție se numeşte “treapta lui Heaviside”.
c) Dacã funcția f satisface condițiile b) şi c) din definiția precedentã atunci $\phi(t)=\sigma(t)\cdot f(t)$ este un original.

Definiție : Aplicația definitã de

$$(Lf)(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

se numeşte transformata Laplace.
Funcția $Lf:(s_0,\infty)\to R$ **este imaginea lui** f **prin transformata Laplace.**

Prin calcul direct se pot obține transformatele Laplace pentru multe funcții elementare.

Exemple : Sã se calculeze transformatele Laplace ale funcțiilor
1) $f(t)=\sigma(t)\cdot e^{kt}$**.**

$$(Lf)(p)=\int_0^\infty e^{kt}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{(k-p)t}dt=\frac{1}{k-p}e^{(k-p)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{p-k}\ .$$

2) $f(t)=\sigma(t)\sin t$

$$(Lf)(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=-e^{-pt}\cos t\,|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^\infty pe^{-pt}\cos t dt=$$

$$=1-p\left(e^{-pt}\sin t\,|_{t=0}^{t=\infty}+\int_0^\infty pe^{-pt}\sin t dt\right).$$

Rezultă $(Lf)(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$.

Principalele proprietăţti ale transformatei Laplace sunt listate în tabelul următor.

Numele proprietăţii	Formula
Definiţie	$Lf(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
Teorema omotetiei	$L(f(\lambda t))(p)=\frac{1}{\lambda}(Lf)\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Derivarea originalului	$(Lf')(p)=p\cdot(Lf)(p)-f(0)$ $(Lf'')(p)=p^2\cdot(Lf)(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$ .... $\left(Lf^{(n)}\right)(p)=p^n(Lf)(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
Derivarea imaginii	$(Lf)^{(n)}=\int_0^\infty(-t)^n f(t)e^{-pt}dt$
Integrarea originalului	$\left(L\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{(Lf)(p)}{p}$
Integrarea imaginii	$\int_p^\infty(Lf)(q)dq=\left(L\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)(p)$ **pentru** $p=0$ $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty(Lf)(q)dq$

Teorema translației	$L\left(e^{p_0 t} f(t)\right)(p) = (Lf)(p - p_0)$
Teorema întârzierii	$L\left(f(t-\tau)\right)(p) = e^{-pt}(Lf)(p)$
Imaginea produsului de convoluție	$L\left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) dt\right)(p) = (Lf)(p) \cdot (Lg)(p)$

Folosind formulele din tabelul de mai sus (toate formulele se demonstrează prin calcul direct) se pot calcula transformatele Laplace ale multor funcții elementare.

Exemple : Gãsiți imaginile următoarelor funcții original :

1. $f(t) = \sigma(t) \cdot \sin(\lambda t)$

Se foloseşte teorema de omotetie şi rezultã

$$(Lf)(p) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(p^2/\lambda^2 + 1)} = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}.$$

2. $f(t) = \sigma(t) \sin^2 t$

Se foloseşte derivarea originalului. Din

$f'(t) = \sigma(t) 2 \sin t \cos t = \sigma(t) \sin(2t)$ **şi**

$(Lf')(p) = p(Lf)(p) - f(0)$ rezultã $(Lf)(p) = \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

3. $g(t) = t^2 e^t$

Se foloseşte derivarea imaginii pentru $f(t) = e^t$ şi $n = 2$. Rezultã

$$\left(L\left((-t)^2 e^t\right)\right)(p) = (Lf)''(p) = \left(\frac{1}{p-1}\right)'' = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

4. $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

Se foloseşte integrarea imaginii :

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(p)=\int_p^{\infty}(Lf)(q)dq=\int_p^{\infty}\frac{1}{q^2+1}dq=arctg(q)\Big|_{q=p}^{q=\infty}=\pi/2-arctg(p).$$

Imaginile celor mai importante funcții elementare sunt conținute în tabelul următor :

Originalul	**Imaginea**
1	$\frac{1}{p}$
$t^n \quad , \ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n \cdot e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$sh(\omega t)=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$ch(\omega t)=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$\sin(t-\tau)$	$\dfrac{e^{-p\tau}}{p^2+1}$
$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{pe^{-p\tau}}{p^2+1}$
$\ln t$	$\dfrac{1}{p}\left(\ln\dfrac{1}{p}-\gamma\right)$ **cu** $\gamma \approx 0.57722$

6.2. Inversa transformatei Laplace

Prin transformata Laplace L definitã pe O_R se calculeazã imaginile funcțiilor original $f \in O_R$. Prin transformata Laplace inversã L^{-1} se regãseşte funcția original care corespunde unei imagini date.

Principalele cazuri în care funcția original poate fi determinatã analitic sunt prezentate în cele ce urmeazã.

1. **Dacã** $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ **este o fracție raționalã atunci ea se descompune în fracții simple şi se gãseşte originalul fiecãrei fracții folosind tabelul anterior.**

Exemple : Sã se determine originalul urmãtoarelor funcții

a) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$

Se observã cã $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{20}\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{p^2+4}$.

Originalul lui $\dfrac{1}{p}$ este 1 (în tabelul transformatelor Laplace pe coloana din stânga corespunzãtoare lui $1/p$ este scrisã funcția "1", originalul lui $\dfrac{1}{p-1}$ eate e^t, originalul lui $\dfrac{p}{p^2+4}$ este $\cos 2t$ iar originalul lui $\dfrac{1}{p^2+4}$ este $\dfrac{1}{2}\sin 2t$.

Rezultã cã originalul lui $F(p)$ este

$$f(t)=-\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

b) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

Se observã cã $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$ este imaginea unui produs de convoluție, adicã

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}=L\left(\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau\right)(p)=(Lf)(p).$$

Rezultã cã

$$f(t)=\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{\cos(t-2\tau)-\cos t}{2}\,d\tau=\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

2. Dacã $F(p)=\dfrac{Q(p)}{(p-p_1)^{n_1}\cdot(p-p^2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_k)^{n_k}}$ **este o fracție în care** $n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 2$ **atunci descompunerea în fracții simple este dificilã şi se poate folosi direct formula**

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n_i-1)!}\cdot\lim_{p\to p_1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\cdot(p-p_i)^{n_i}\right)^{(n_i-1)}$$

unde exponentul (n_i-1) **aratã cã expresia din parantezã se deriveazã de** (n_i-1) **ori în raport cu** p **.**

Exemplu : Sã se determine originalul lui $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$

Deoarece $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+1)^2}$ se foloseşte formula anterioarã pentru $p_1=1,\ p_2=-1,\ n_1=n_2=2$.

Deci

$$f(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{(p+1)^2}e^{pt}\right)'+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to -1}\left(\frac{1}{(p-1)^2}e^{pt}\right)'$$

$$=\lim_{p\to 1}\left(e^{pt}\left(\frac{t}{(p+1)^2}-2\frac{1}{(p+1)^3}\right)\right)+\lim_{p\to -1}\left(e^{pt}\left(\frac{t}{(p-1)^2}-2\frac{1}{(p-1)^3}\right)\right)$$

$$=e^t\left(\frac{t}{4}-\frac{2}{8}\right)+e^{-t}\left(\frac{t}{4}+\frac{2}{8}\right)=\frac{t}{4}\left(e^t+e^{-t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^t+e^{-t}\right)=\frac{t\cdot ch(t)}{2}+\frac{sh(t)}{2}$$

3.Dacã funcția $F(p)$ **conține factorul** $e^{-\lambda p}$ **se foloseşte teorema întârzierii.**

Exemplu : Sã se determine originalul funcției $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^2}$ **.**

Deoarece $F(p)=e^{-p}\dfrac{2!}{p^2}=e^{-p}(Lt^2)(p)=\left(L(t-1)^2\right)(p)$, ceea ce s-a obținut aplicând teorema întârzierii pentru $\tau=1$ şi $t=t^2$, rezultã cã $f(t)=(t-1)^2\cdot\sigma(t-1)$. Inmulțirea cu $\sigma(t-1)$ este necesarã pentru ca f sã fie o funcție original.

6.3. Calcul operațional

Calculul operațional, numit şi calcul simbolic, a fost introdus la sfârşitul secolului XIX de fizicianul englez O. Heaviside. Acesta a pus în evidențã (fãrã nici o justificare matematicã) faptul cã este posibilã rezolvarea rapidã a unor ecuații folosind un operator simbolic, evitând astfel calcule lungi ce apar în rezolvarea clasicã. Aceastã metodã se justificã parțial folosinf Transformata Laplace care transformã derivarea în înmulțire cu variabila p şi integrarea în împãrțire la aceeaşi variabilã.

Pentru rezolvarea anumitor tipuri de ecuații (E) folosind transformata Laplace se parcurg urmãtoarele etape :

a) **Se formeazã ecuația operaționalã (EO) prin aplicarea transformatei Laplace celor doi membri ai ecuației.**

Ecuație operaționalã este o ecuație algebricã de gradul I având drept necunoscutã imaginea (prin transformata Laplace) a necunoscutei ecuației.

b) **Se rezolvã ecuația operaționalã**

Soluția (unicã) a ecuației este imaginea necunoscutei din ecuația inițialã

c) **Se determinã originalul funcției soluție de la b). Acesta reprezintã soluția ecuației inițiale.**

Principalele aplicații ale calcului operațional sunt :

- calculul inegralelor improprii
- rezolvare ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți
- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

- rezolvarea unor ecuații integrale
- rezolvarea unor ecuații integro-diferențiale
- rezolvarea ecuațiilor cu argument întârziat
- rezolvarea unor ecuații cu derivate partiale

6.3.1 Rezolvarea ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți şi a problemelor Cauchy ataşate

Problema Cauchy având necunoscuta $y = y(t)$ are forma

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(t) \\ y(0) = y_{00}, y'(0) =_{01}, ..., y^{(n-1)}(0) = y_{0n-1} \end{cases} \quad \text{(E).}$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (E) se obține ecuația operațională

$$a_n (Ly^{(n)})(p) + a_{n-1}(Ly^{(n-1)})(p) + ... + a_0 (Ly)(p) = (Lf)(p).$$

Se notează $(Ly)(p) = Y(p)$, se foloseşte teorema de derivare a originalului şi se obține ecuația operațională

$$a_n \left(p^n Y(p) + p^{n-1} y(0) + ... y^{(n-1)}(0) \right) + ... + a_1 \left(pY(p) - y(0) \right) + a_0 Y(p) = F(p)$$

(EO).

Se aplică apoi algoritmul de rezolvare prezentat anterior.
Metoda se poate folosi şi pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale. In acest caz valorile $y(0)$, $y'(0)$. ..., $y^{(n-1)}(0)$ reprezintă cele n constante ce apar în soluția generală.

Exemple : 1. Să se determine soluția generală a ecuației $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$.

a) Ecuația operațională este

$$\left(p^2 - 3p + 2 \right) Y(p) - py(0) - y'(0) + 3y(0) = \frac{1}{p+1}.$$

b) Soluția ecuației operaționale este

$$Y(p)=\frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}+y(0)\frac{p}{(p-1)(p-2)}+$$
$$+\left(y'(0)+3y(0)\right)\frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

După descompunerea în fracții simple rezultă

$$Y(p)=\left(-\frac{1}{2}+2y(0)+y'(0)\right)\frac{1}{p-1}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}+\left(\frac{1}{3}+5y(0)+3y'(0)\right)\frac{1}{p-2}=$$
$$=C_1\frac{1}{p-1}+C_2\frac{1}{p-2}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}.$$

c) Originalul lui $Y(p)$ este $y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}$. Aceasta este soluția generală a ecuației liniare.

In această situație aplicarea transformatei Laplace pentru rezolvarea ecuației nu ușurează calculele. Aplicarea ei este justificată mai ales în rezolvarea problemelor Cauchy.

2. Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y''+y=2\cos t \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$

a) Ecuația operațională este $p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+Y(p)=\dfrac{2p}{p^2+1}$.

b) Soluția ecuației operaționale este $Y(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{p^2+1}$.

Pentru a nu efectua operații aritmetice inutile este recomandabil să nu se aducă fracțiile la același numitor.

c) Originalul clui $Y(p)$ este $y(t)=\sigma(t)\left(t\sin t+\sin t\right)$.

Soluția problemei Cauchy este $y(t)=(t+1)\sin t$.

6.3.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Pentru a rezolva astfel de sisteme se obține sistemul de ecuații operaționale aplicând transformata Laplace tuturor ecuațiilor sistemului.

Soluțiile sistemului sunt imaginile funcțiilor necunoscute ale sistemului inițial. Prin aplicarea transformatei Laplace inversã se obțin soluțiile cãutate.

Exemplu : Sã se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x''+x+y''-y'=e^{t} \\ x'+2x-y'+y=e^{-t} \\ x(0)=y(0)=y'(0)=0,\ x'(0)=1 \end{cases}.$$

Sistemul operațional este

$$\begin{cases} p^2X(p)-1+pX(p)+p^2Y(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ pX(p)+2X(p)-pY(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p+1} \end{cases}.$$ El este un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele $X(p)$ și $Y(p)$.

Soluția sistemului este $\begin{cases} X(p)=\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(p+1)^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{p+1} \\ Y(p)=\dfrac{3p}{3\left(p^2-1\right)^2} \end{cases}.$

Soluția sistemului este $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}\cdot sht+\dfrac{3}{4}te^{-t} \\ y(t)=\dfrac{3}{4}t\cdot sht \end{cases}.$

Calculul operațional este folosit de majoritatea soft-urilor pentru rezolvarea problemelor Cauchy liniare cu coeficienți constanți .

6.3 Exerciții propuse :

Aplicând metodele calcului operațional sã se rezolve urmãtoarele probleme Cauchy :

1. $y''+20y=0,\ y(0)=0.5,\ y'(0)=0$ **R :** $y(t)=\frac{1}{2}\cos\left(2t\sqrt{5}\right)$

2. $x'+x=e^{-t},\ \ x(0)=1$ **R :** $x(t)=(t+1)e^{-t}$

3. $x'-x=1,\ x(0)=-1$ **R :** $x(t)=-1$

4. $x'+2x=\sin t,\ x(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}-\cos t+2\sin t\right)$

5. $x''=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ **R :** $x(t)=t+\frac{1}{2}t^2$

6. $x''+x'=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ **R :** $x(t)=t$

7. $x''+3x'=e^t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$ **R :** $x(t)=\frac{1}{4}e^t+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$

8. $\begin{cases} x'''+x'=1 \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0 \end{cases}$ **R :** $x(t)=t-\sin t$

9. $\begin{cases} x'''+x'=t \\ x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=0 \end{cases}$ **R :** $x(t)=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$

10. $\begin{cases} x'''-x''=\sin t \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0 \end{cases}$ **R :** $x(t)=\frac{1}{2}e^t-t-1-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t$

11. $x''-2x'=e^{2t},\ \ x(0)=x'(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{2t}+2te^{3t}\right)$

12. $\begin{cases} x'''+x''=\sin t \\ x(0)=-1 \\ x'(0)=2 \\ x''(0)=0 \end{cases}$

R : $x(t)=\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$

13. $\begin{cases} x'''+x''=\sin t \\ x(0)=x'(0)=1 \\ x''(0)=0 \end{cases}$

R : $x(t)=2t+\frac{1}{2}\left(e^{-t}+\cos t-\sin t\right)$

14.
$x''+x=\cos t,\ \ x(0)=-1,\ x'(0)=1$

R : $x(t)=\frac{1}{2}(t\sin t-\cos t+\sin t)$

15.
$x''+2x'+x=t^2,\ \ x(0)=1,\ x'(0)=0$

R : $x(t)=t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$

CAPITOLUL 7

Aplicații ale ecuaților diferențiale de ordin superior si ale sistemelor de ecuații diferențiale

7.1 Oscilații armonice

7.1.a. Oscilații neamortizate (ecuație liniară)

Ecuația oscilațiilor neamortizate este

$$x''(t)+\omega_0^{\;2}\cdot x(t)=a\cdot\sin\omega t.$$

Ea este o ecuație diferențială liniară de ordinul II cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată este $r^2+\omega_0^{\;2}=0$ şi are soluțiile $r_1=\omega_0\cdot i$, respectiv $r_2=-\omega_0\cdot i$.

Soluția generală a ecuației omogene este

$$x_g(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t\ \mathbf{.}$$

Pentru a găsi o soluție particulară se disting două cazuri :

- dacă $\omega_0\neq\omega$ o soluție particulară are forma $x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.

In această situație $x'(t)=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$ şi $x''(t)=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t$. Introducând în ecuație obținem $\left(\omega_0^{\;2}-\omega^2\right)A\cos\omega t+\left(\omega_0^{\;2}-\omega^2\right)B\sin\omega t=a\sin\omega t$ şi, din identificarea coeficienților rezultă $A=0$ şi $B=\dfrac{a}{\omega_0^{\;2}-\omega^2}$. Soluția particulară este deci

$$x_p(t)=\frac{a}{\omega_0^{\;2}-\omega^2}\sin\omega t\quad .$$

Soluția generală a ecuației va fi $x(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\dfrac{a}{\omega_0^{\;2}-\omega^2}\sin\omega t$.

- dacă $\omega_0 = \omega$ soluția particulară se caută sub forma $x_p(t) = (At + B)\sin\omega_0 t + (Ct + D)\cos\omega_0 t$. Din calcule similare celor precedente rezultă $x_p(t) = -\dfrac{a}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t$ şi soluția generală este

$$x(t) = (C_1 - \frac{a}{2\omega_0} t)\cdot\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \quad .$$

In acest caz amplitudinea mişcării devine considerabilă, ceea ce permite obținerea unor efecte enorme folosind un termen perturbator mic (valoarea lui a este mică).
Acest efect este important (de exemplu) pentru obținerea unor tensiuni ridicate necesare amplificării unor semnale radio.

7.1.b. Oscilații amortizate

Dacă se ține cont de amortizarea oscilațiilor se obține ecuația

$$x''(t) + 2\alpha\cdot x'(t) + \Omega^2\cdot x(t) = a\cdot\sin\omega t\,.$$

Ecuația carateristică asociată, $r^2 + 2\alpha r + \Omega^2 = 0$, are soluțiile $r_{1.2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

- dacă $\alpha^2 > \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = C_1 e^{\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \Omega^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \Omega^2}\right)t}$
- dacă $\alpha^2 = \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\alpha t}$
- dacă $\alpha^2 < \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1\cos\left(t\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\right) + C_2\sin\left(t\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\right)\right)$.

Condiția $\alpha > 0$ arată că $\lim\limits_{t\to\infty} x_g(t) = 0$ adică, în absența unui termen perturbator, mişcarea este amortizată .
Deoarece ecuația caracteristică nu are rădăcini pur imaginare, soluția particulară se caută sub forma $x_p(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$.

Inlocuind $x'(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$ şi $x''(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$ în ecuația inițială obținem, prin identificarea coeficienților, ecuațiile $\begin{cases}(\Omega^2-\omega^2)A - 2\alpha\omega B = a\\ 2\alpha\omega A + (\Omega^2-\omega^2)B = 0\end{cases}$ din care rezultă

$$A = a\frac{\Omega^2-\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2} \text{ şi } B = -a\frac{2\alpha\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}.$$

In acest caz soluția particulară este

$$x_p(t) = a\frac{\Omega^2-\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\cos\omega t - a\frac{2\alpha\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\sin\omega t$$

Ca de obicei, soluția generală a ecuației este $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$.

Exemplu: Să se resolve ecuația $x''+4x'+9x = 3\sin 2t$.

In acest caz $\alpha = 2$, $\Omega = 3$, $\omega = 2$.

Ecuația caracteristică $r^2+4r+9=0$ are soluțiile $r_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{5}$, deci soluția generală a ecuației omogene este
$x_g(t) = e^{-2t}\left(C_1\cos\sqrt{5}t + C_2\sin\sqrt{5}t\right)$.

Soluția particulară este $x_p(t) = \frac{15}{89}\sin 2t - \frac{24}{89}\cos 2t$. Ea se mai poate scrie sub forma $x_p(t) = \frac{3}{\sqrt{89}}\sin(2t-\phi)$, unde $tg\phi = \frac{8}{5}$. Ea are perioada principală $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ care este considerată perioada de oscilație.

Să observăm însă că soluția generală

$$x(t) = e^{-2t}\left(C_1\cos\sqrt{5}t + C_2\sin\sqrt{5}t\right) + \frac{3}{89}(5\sin 2t - 8\cos 2t)$$

Nu este o funcție periodică.

7.2. Mişcarea unui pendul (ecuație liniară)

Să se descrie mişcarea unui pendul legat de punctul O printr-un fir de lungime *l*, dacă acest pendul este deviat de la verticala locului cu unghiul la centru θ_0 şi viteza sa inițiala este v_0.

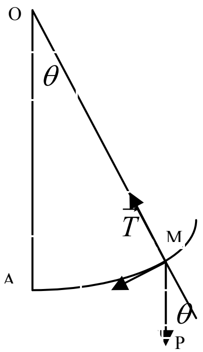

Figura 3. Pendulul matematic

Se consideră ca variabilă independentă unghiul dintre verticala locului şi firul *OM* (pendulul se află în punctul M). Funcția necunoscută $x = x(\theta)$ reprezintă arcul *OM*. Asupra corpului aflat în *M* acționează greutatea $\vec{G} = mg$ dirijată pe verticală în jos şi tensiunea în fir dirijată de-a lungul firului spre punctul *O*. Forța rezultantă este $\vec{F} = -mg\sin\theta \cdot \vec{t} + (T - mg\cos\theta)\cdot \vec{n}$, unde $\vec{t}$, $\vec{n}$ reprezintă vectorul tangent, respectiv normal, la traiectorie.

Proiectând legea fundamentală $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ de-a lungul tangentei la traiectorie şi tinând cont că accelerația este a doua derivată a spațiului, obținem ecuația

$$x''(\theta) = -g\sin\theta \; .$$

Dacă $\theta < 10^\circ$ atunci se poate face aproximația $\sin\theta \approx \theta = x(\theta)/l$ şi ecuația devine

$$x'' = -g \cdot x / l$$

Aceasta poate fi considerată o oscilație neamortizată dacă vom considera $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Soluția sa generală (vezi paragraful 1 sect 1a.) este $x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$. Ea se mai poate scrie

$$x(t) = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\left(\sin\phi \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + \cos\phi \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)\right) = M \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi\right)$$

,

unde $\phi \in (-\pi, \pi)$ este unghiul ce are $\cos\phi = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}$ şi $\sin\phi = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}}$ iar $M = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$.

Aceasta este cea mai simplă mişcare periodică, numită şi mişcare armonică.

Perioada mişcării este $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$, care este independentă de masa pendulului.

Constantele mişcării (C_1, C_2 sau M, ϕ) se determină din condițiile inițiale $x(0) = \pi \cdot l \cdot \theta_0 / 180$, $x'(0) = v_0$.

7.3. Calculul perioadei unui circuit oscilant (ecuație liniară)

Un circuit oscilant este format dintr-o bobină (de inductanță L) legată de un condensator de capacitate C. Codensatorul, încărcat în prealabil, se descarcă în bobină.

Variabila independentă este timpul *t*. Se notează
- $i(t)$ intensitatea curentului la momentul *t*
- $q(t)$ sarcina electrică a condensatorului la momentul *t*
- $v(t)=q(t)/C$ diferența de potențial la bornele condensatorului la momentul *t*.

Forța electromotoare datorată variației de flux în bobină este $e=-L\cdot i'(t)$ iar legea lui Kirchoff arată că $i(t)=(v(t)+e(t))/R$.
Inlocuind toate aceste expresii in funcție de $q(t)$ obținem ecuația

$$q''(t)+\frac{R}{L}\cdot q'(t)+\frac{1}{L\cdot C}q(t)=0$$

Ceea ce reprezintă un oscillator amortizat fără termen perturbator (paragraful 1, secțiunea 1b.), considerând $\alpha=\frac{R}{2L}$ și $\Omega^2=\frac{1}{L\cdot C}$.
Reluând rezultatele prezentate acolo obținem:

- dacă $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2>\Omega^2$) atunci soluția generală este

$$q(t)=A\cdot e^{\left(\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha\right)t}+Be^{\left(-\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha\right)t}.$$

Constantele *A* și *B* se determină din condițiile inițiale $q(0)=q_0$ și $i(0)=0$

Din sistemul $\begin{cases}A+B=q_0\\ A\left(\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha\right)-B\left(\left(\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}+\alpha\right)\right)=0\end{cases}$ rezultă

$$A=\frac{q_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}} \text{ și } B=\frac{q_0}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}}.$$

Să remarcăm că puterile ce apar la exponenți sunt amândouă negative și deci $\lim_{t\to\infty}q(t)=0$.

- dacă $R = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2 = \Omega^2$) atunci soluția generală este $q(t) = (At + B) \cdot e^{-\alpha t}$.

Coeficienții *A* şi *B* sunt în acest caz $A = -q_0$ şi $B = q_0$ şi soluția se scrie

$$q(t) = q_0(t-1) \cdot e^{-\alpha t}.$$

- dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2 < \Omega^2$) atunci soluția generală este

$$q(t) = e^{-\alpha t}\left(M \cos\left(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \cdot t \right) + N \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \cdot t \right)\right).$$

Din condițiile inițiale rezultă $M = q_0$ şi $N = \dfrac{q_0 \alpha}{\left(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \right)}$.

In problemele legate de circuite electrice este mai importantă studierea funcțiilor *i(t)* şi *v(t)* decât cunoaşterea lui *q(t)*, de aceea le explicităm în acest ultim caz.

Se notează $\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} / \alpha = tg\phi$, deci $\cos\phi = \alpha / \Omega$ şi $\sin\phi = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} / \Omega$ şi se obține

$$v(t) = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \cdot \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \cdot t + \phi \right)$$

$$i(t) = \frac{q_0 \Omega^2}{\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2} \cdot t \right).$$

Ea reprezintă o mişcare oscilantă amortizată, neperiodică, dar distanța între punctele de extrem este constantă, $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$. Aceasta formulă a fost obținută de William Thomson şi este cunoscută sub numele de “perioadă a circuitului oscilant”.

Un astfel de circuit este un generator de oscilații amortizate.
In situații concrete α^2 este mult mai mic decât Ω^2 deci $\cos\phi \approx 0$ şi $\sin\phi \approx 1$, ceea ce arată că $\phi \approx \pi/2$. In aceste condiții se obțin

$$v(t) = \frac{q_0}{C} e^{-\alpha t} \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{q_0}{2} e^{-\alpha r} \cos \Omega t$$

$$i(t) = q_0 \Omega e^{-\alpha t} \sin \Omega t$$

In această situație perioada circuitului este $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

7.4. **Oscilații ale unei coloane de lichid (ecuație liniară)**
Se consideră un tub în forma de U, deschis la ambele capete, cu secțiunea *S* conținând un lichid. Se provoacă o denivelare a lichidului față de poziția de echilibru radicând nivelul său într-o aripă a tubului cu x_0. Să se descrie mişcarea lichidului.

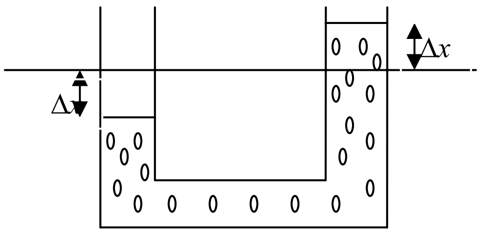

Figura 4. Oscilatia unei coloane de lichid

Variabila independentă este timpul t iar funcția necunoscută este $x = x(t)$, care măsoară diferența de nivel dintre poziția de echilibru şi nivelul licidului măsurată pe o aripă a tubului.
Se consideră cunoscute *m* = masa lichidului, *S* = secțiunea tubului, *l* = lungimea tubului ocupată de lichid, ρ = densitatea lichidului şi *g* = accelerația gravitațională.

Deoarece tubul poate fi asimilat cu unul cilindric se poate considera că $m = \rho \cdot l \cdot S$.

Lichidul se pune în mişcare pentru că asupra lui acționează forța de greutate corespunzătoare coloanei de lichid cu înălțimea $2x(t)$. Mărimea acestei forțe este $F(t) = 2 \cdot x(t) \cdot S \cdot \rho \cdot g$. Scriind legea fundamentală a dinamicii obținem ecuația $m \cdot x''(t) = -2 \cdot x(t) \cdot S \cdot \rho \cdot g$, adică

$$x''(t) + \frac{2g}{l} x(t) = 0.$$

Ea reprezintă un oscillator neamortizat (paragraful 1, secțiunea 1a.) dacă notăm $\omega_0^{\ 2} = \frac{2g}{l}$.

Soluția generală este $x(t) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot t + \phi\right)$ ceea ce arată că, în cazul ideal (fără amortizare datorată frecării) lichidul va avea o mişcare oscilantă în jurul poziției de echilibru.

Dacă se ia în considerare şi frecarea se obține o mişcare oscilantă amortizată asemănătoare celei din paragraful anterior.

7.5 Propagarea căldurii într-o bară (ecuație liniară)

Se consideră o bară de lungime mare, teoretic infinită care este încastrată cu o extremitate într-un mediu a caarui temperatură este mai mare decât cea a mediului ambiant. Să se descrie distribuția temperaturii de-a lungul barei atunci când este atins regimul permanent, adică temperatura nu se modifică în timp.

Variabila independentă este *x*, distanța la punctul de fixare, corespunzător lui *x=0*. funcția necunoscută este temperatura $T = T(x)$.

Cantitatea de căldură ce traversează secțiunea *S* a barei (aflată la distanța *x* de punctul de fixare) într-o secundă este $Q = -K \cdot S \cdot T'(x)$. Coeficientul *K* măsoară conductivitatea termică a materialului şi

semnul “-“ arată că temperatura se micşorează atunci când ne depărtăm de punctul de fixare..
Pe distanța Δx se pierde o cantitate de căldură $\Delta Q = -K \cdot S \cdot \Delta x \cdot T''(x)$.
Această pierdere poate fi calculată şi folosind formula $\Delta Q = -\alpha \cdot T(x) \cdot p \cdot \Delta x$ unde α este coeficientul de dispersie a căldurii (care depinde de calitățile suprafeței exerioare, de exemplu porozitate, culoare) iar *p* este aria laterală a barei de lungime Δx.
Egalând cele două expresii obținem ecuația $-K \cdot S \cdot \Delta x \cdot T''(x) = -\alpha \cdot T(x) \cdot p \cdot \Delta x$, adică

$$T''(x) - \omega_0^2 \cdot T(x) = 0$$

unde $\omega_0^2 = p \cdot \alpha / (K \cdot S)$. Soluția generală a ecuației este

$$T(x) = A \cdot e^{\omega_0 x} + B \cdot e^{-\omega_0 x}.$$

Deoarece condiția $\lim_{x \to \infty} T(x) = 0$ este naturală rezultă că $A = 0$. Din $T(0) = T_0$ se deduce

$$T(x) = T_0 \cdot e^{-\omega_0 x}$$

ceea ce arată că temperatura scade exponențial în raport cu distanța.

7.6 Ecuații de mişcare (ecuații liniare)

7.6.1. Căderea corpurilor (mişcare rectilinie)

Miscarea rectilinie a unui corp de masă *m* asupra căruia acționează o forță de atracție proporțională cu distanța *x* la un punct fix O este descrisă de ecuația

$$x''(t) = -g$$

unde $x = x(t)$ reprezintă distanța de la corp până la O, măsurată la momentul de timp *t*.
Dacă notăm $v(t) = x'(t)$ obținem ecuația $v'(t) = -g$ cu soluția $v(t) = -gt + C_1$ şi din $x'(t) = -gt + C_1$ rezultă $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$.

Dacă la momentul inițial $t=0$ corpul se afla la distanța x_0 față de origine şi a fost lansat cu viteza $v(0)=v_0$ atunci legea de mişcare a corpului va fi

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0.$$

7.6.2. Mişcarea unui corp într-un câmp de forțe centrale (mişcare plană)

Să se descrie mişcare unui punct material într-un plan dacă acesta este atras de centrul *O* cu o forță proporțională cu distanța la *O*. Mişcarea începe dintr-un punct aflat la distanța *a* de centrul *O* şi viteza inițială, perpendiculară pe raza *OA*, are mărimea v_0.

Variabila independentă este timpul *t* iar funcțiile necunoscute sunt $x=x(t)$ şi $y=y(t)$ care reprezintă coordonatele punctului material la momentul *t*.

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie $\begin{cases} m\cdot x''=-k^2\cdot x \\ m\cdot y''=-k^2\cdot y \end{cases}$.

Se consideră (pentru simplificarea calculelor) că mişcarea începe din $A(a,0)$.

Condițiile inițiale sunt deci $\begin{cases} x(0)=a & y(0)=0 \\ x'(0)=0 & y'(0)=v_0 \end{cases}$.

Soluția generală a sistemului de ecuații (independente una de cealaltă) este

$$\begin{cases} x(t)=A\cdot\cos\left(\dfrac{k}{\sqrt{m}}t\right)+B\cdot\sin\left(\dfrac{k}{\sqrt{m}}t\right) \\ y(t)=C\cdot\cos\left(\dfrac{k}{\sqrt{m}}t\right)+D\cdot\sin\left(\dfrac{k}{\sqrt{m}}t\right) \end{cases}.$$

Din condițiile inițiale rezultă $A=a$, $B=0$, $C=0$, $D=v_0\cdot\dfrac{\sqrt{m}}{k}$, deci soluția sistemului este

$$x(t) = a \cdot \cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right), \quad y(t) = v_0 \cdot \frac{\sqrt{m}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right).$$

Din eliminarea lui t între cele două ecuații rezultă că traiectoria punctului are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{m \cdot v_0{}^2} y^2 = 1$$

ceea ce arată ca punctul se mişcă pe o elipsă

7.7 Determinarea coeficientului de frecare (ec neliniară)

Un punct material de masă *m* se mişcă cu frecare pe un cerc vertical. La momentul inițial se află la o extremitate a diametrului orizontal şi are viteza inițială $v_0 = 0$. El atinge cel mai coborât punct de pe cerc cu o viteză egală cu 0. Să se determine coeficientul de frecare μ dintre punct şi cerc.

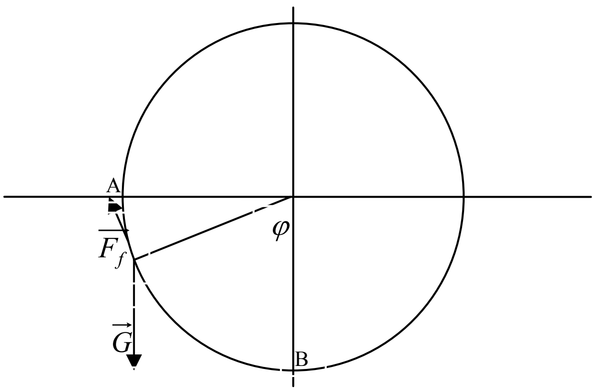

Figura 5. Mişcare cu frecare

Variabila independentă este timpul iar funcția necunoscută este $\phi=\phi(t)$ care măsoară unghiul la centru format de raza vectoare cu raza vectoare inițială OA.

Considerăm $\overrightarrow{t_C}$ şi $\overrightarrow{n_C}$ vectorii tangent, respective normal la cercul (C).

Viteza corpului este $\vec{v}(t)=r\cdot\phi'(t)\cdot\overrightarrow{t_C}$ iar accelerația este $\vec{a}(t)=r\cdot\phi''(t)\cdot\overrightarrow{t_C}+r\cdot v^2(t)\cdot\overrightarrow{n_C}$

Ecuația de mişcare, $m\cdot\vec{a}=\vec{G}+\vec{R}+\overrightarrow{F_f}$, proiectată după direcția normalei şi a tangentei la cerc aceasta conduce la sistemul

$$\begin{cases} G\cos\phi-F_f=m\cdot r\cdot\phi'' \\ R-G\cdot\sin\phi=-m\cdot r\cdot\phi'^2 \end{cases} \text{deci } \begin{cases} m\cdot r\cdot\phi''=m\cdot g\cdot\cos\phi-\mu\cdot R \\ -m\cdot r\cdot\phi'^2=m\cdot g\cdot\sin\phi-R \end{cases}.$$

Eliminând $R=m\cdot g\cdot\sin\phi+m\cdot r\cdot\phi'^2$ între cele două ecuații obținem ecuația diferențială neliniară de ordinul II incompletă (variabila independentă nu apare explicit)

$$r\cdot\phi''+\mu\cdot\phi'^2+\mu\cdot g\sin\phi-g\cdot\cos\phi=0.$$

Se notează $z=\phi'^2$ şi , deoarece $z'=2\cdot\phi'\cdot\phi''=z'(\phi')\cdot\phi'$, se obține $\phi''=\frac{1}{2}z'$. Ecuația de ordinal II devine

$$\frac{r}{2}\cdot z'+\mu\cdot r\cdot z=g\cdot(\cos\phi-\mu\cdot\sin\phi)$$

care este o ecuație liniară de ordinul I.

Ecuația omogenă ataşată, $z'=-2\cdot\mu\cdot z$ are soluția generală $z=C\cdot e^{-2\cdot\mu\cdot\phi}$.

Aplicând metoda variației constantei obținem $C'(\phi)=\frac{2}{r}\cdot g\cdot e^{2\cdot\mu\cdot\phi}(\cos\phi-\mu\cdot\sin\phi)$ şi, prin integrare directă rezultă $C(\phi)=\frac{2\cdot g}{r}e^{2\mu\phi}\frac{3\mu\cdot\cos\phi+(1-2\cdot\mu^2)\cdot\sin\phi}{1+4\cdot\mu^2}+K$, ceea ce arată că ecuația liniară are soluția

$$z(\phi)=\frac{2g}{r}\frac{3\mu\cdot\cos\phi+(1-2\cdot\mu^2)\cdot\sin\phi}{1+4\cdot\mu^2}+K\cdot e^{-2\mu\phi}.$$

Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic dar acest lucru nici nu este necesar deoarece, din condițiile inițiale $v(0)=0,\ v\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, adică $z(0)=0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

rezultă $$\begin{cases}\frac{2\cdot g}{r}\cdot\frac{3\cdot\mu}{1+4\cdot\mu^2}+K=0\\ \frac{2\cdot g}{r}\cdot\frac{1-2\mu^2}{1+4\cdot\mu^2}+K\cdot e^{-\mu\cdot\pi}=0\end{cases}$$ adică

$$\left(1-2\cdot\mu^2\right)-3\cdot\mu\cdot e^{-\mu\cdot\pi}=0$$

Nici această ecuație irațională cu necunoscuta μ nu poate fi rezolvată analitic dar soluția ei, aproximată numeric cu o eroare de 0.01 este $\mu=0.62$.

7.8. Determinarea ecuației unei curbe (ecuație neliniară)

Să se determine curbele plane care au raza de curbură constantă $R>0$.

Ecuația curbei căutate va fi $y=y(x)$. Raza de curbură este definită de $\rho=\frac{\left(1-(y')^2\right)^{3/2}}{y''}$, deci ecuația problemei este

$$\left(1-(y')^2\right)^{3/2}=R\cdot y''.$$

Această ecuaţie neliniară incompletă se transformă într-un sistem de ecuaţii de ordinul I $\begin{cases} y' = u \\ R \cdot u' = \left(1 + u^2\right)^{3/2} \end{cases}$.

Din ultima ecuaţie a sistemului rezultă, prin integrare directă $\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} = \dfrac{x - C}{R}$ adică $u = \pm \dfrac{x - C}{\sqrt{R^2 - (x - C)^2}}$. Inlocuind u în prima ecuaţie şi integrand obţinem $y = -\sqrt{R^2 - (x - C)^2} + C_1$, adică

$$(y - C_1)^2 + (x - C)^2 = R^2 .$$

Această relaţie arată ca doar cercurile de rază R (şi centru arbitrar $A(C, C_1)$) au raza de curbură constantă, egală cu R.

Bibliografie

[1] Bălan T., *Transformata Laplace,* Ed. Universitaria, Craiova, 2001
[2] Brînzănescu V., Stănăşilă O., *Matematici Speciale – teorie, exemple, aplicații,* Ed. All, Bucureşti, 1994
[3] Constantinescu D., *Équations Différentielles, Chapitres de Mathématiques Supérieures,* Ed Universitaria, 2003
[4] Corduneanu A., *Ecuații diferențiale cu aplicații în electrotehnică*, Ed. Facle, Timişoara, 1981
[5] Craiu M., Roşculeț M., *Ecuații Diferențiale Aplicative,* EDP, Bucureşti, 1971
[6] Matei Stefan, *Analiza circuitelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1991
[7] Micula Gh., Paraschiva P., *Ecuații diferențiale şi integrale prin probleme şi exerciții,* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1989
[8] Olariu V., Stănăşilă O., *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982
[9] Predoi M., Constantinescu D., Racilă M., *Teme de calcul diferențial / Teme de calcul integral,* Ed. Sitech, Craiova, 2000
[10] Rădoi M., Deciu E., *Mecanică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977
[11] Roşca D., *Mecanică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993
[12] Săvescu M., *Metode de analiză a circuitelor electronice,* Ed. Stiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1993
[13] Soare M., Teodorescu P.P., Toma I., *Ecuații diferențialw cu aplicații în mecanica construcțiilor,* Ed. Tehnică, 1999
[14] Turcitu G., Şterbeți C., *Matematici Speciale – Analiză complexă şi ecuații diferențiale,* Ed. Radical, Craiova, 2001